Devoir non surveillé

Ce devoir est constitué d'un problème de cinq parties. Par convention, $0^0 = 1$.

Problème – Endomorphismes vérifiant $u^2 = ku$

Soit E un espace vectoriel réel non réduit à son vecteur nul.

On appelle *homothétie (de E)* un multiple par un réel de Id_E. Pour tout réel λ, $\lambda\mathrm{Id}_E$ est appelée homothétie de rapport λ.

Si f et g sont deux endomorphismes de E, on note $\Im f$ (ou $\Im(f)$) l'espace image de f, $\operatorname{Ker} f$ (ou $\operatorname{Ker}(f)$) le noyau de f, $fg = f \circ g$, $e = \mathrm{Id}_E$ (identité).

Pour tout entier naturel n, on définit f^n par récurrence en posant $f^0 = e$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n = f \circ f^{n-1}$$

Ainsi, $f^1 = f$ et $f^2 = f \circ f$.

Soit k un réel donné. On note A_k l'ensemble des endomorphismes u de E tels que $u^2 = ku$.

Le symbole 0 désignera selon le contexte le réel nul, le vecteur nul de E, ou l'application nulle de E dans lui-même (*i.e.* le vecteur nul de $\mathcal{L}(E)$).

Partie A – Généralités

A.1 Soit f une homothétie de E.

a Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que f soit de rapport λ.

b Montrer que f est inversible (*i.e.* bijective) si et seulement si son rapport est non nul.

A.2 Soit $u \in A_k$.

a u peut-il être inversible ? Qu'est-ce que u dans ce cas ?

b Déterminer $u(x)$ pour $x \in \Im u$.

c Montrer que si $k \neq 0$, $\Im u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des sous-espaces supplémentaires dans E. Que dire de $\Im u$ et $\operatorname{Ker} u$ si $k = 0$?

Partie B – Éléments de A_k commutant

Soient u et v deux endomorphismes de E appartenant à A_k. *On suppose dans cette partie que* $k \neq 0$.

B.1 Montrer que $uv + vu = 0$ implique $uv = vu = 0$.
Indication : composer.

B.2

a Montrer que $u + v \in A_k$ si et seulement si $uv = vu = 0$.

On se place dans le cas où $u + v \in A_k$.

b Montrer que : $\Im(u+v) = \Im u + \Im v$.

c Montrer que : $\operatorname{Ker}(u+v) = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v$.

B.3 Montrer que si $uv = vu$, alors uv appartient à un ensemble $A_{k'}$ (pour un réel k' que l'on déterminera), et que dans ce cas

$$\Im uv = \Im u \cap \Im v \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} uv = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v.$$

Partie C – Celle du milieu

Soit f un endomorphisme de E satisfaisant à la relation $f^2 - af + be = 0$, où a et b sont des réels donnés. On suppose que f n'est pas une homothétie.

C.1 Montrer que f et e sont linéairement indépendants, *i.e.* si λ et μ sont deux réels tels que $\lambda f + \mu e = 0$, alors $\lambda = \mu = 0$.

C.2 Soit $(\lambda, k) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $f - \lambda e \in A_k$ si et seulement si

$$\lambda^2 - a\lambda + b = 0 \quad \text{et} \quad k = a - 2\lambda.$$

C.3 Quelle condition nécessaire et suffisante doivent satisfaire a et b pour qu'il existe deux constantes réelles distinctes λ_1 et λ_2, telles que les endomorphismes $u = f - \lambda_1 e$ et $v = f - \lambda_2 e$ appartiennent respectivement à A_{k_1} et A_{k_2}, pour certains réels k_1 et k_2 ?

C.4 Montrer que dans ce cas, on a $uv = vu = 0$.

C.5 Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^p = \frac{\lambda_1^p - \lambda_2^p}{\lambda_1 - \lambda_2} f + \frac{\lambda_2 \lambda_1^p - \lambda_1 \lambda_2^p}{\lambda_2 - \lambda_1} e.$$

C.6 À quelle condition nécessaire et suffisante f est-il inversible ? Quel est alors son inverse ?

Partie D – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On considère l'application φ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même, envoyant une suite réelle (u_n) sur la suite de terme général $v_n = u_{n+1}$.

D.1

a Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b φ est-il injectif ? surjectif ?

c Soit $(p, m) \in \mathbb{N}^2$, $u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donner $(\varphi^p(u))_m$.

D.2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On introduit l'ensemble Ω des suites réelles (u_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} - bu_n.$$

a Décrire Ω comme noyau d'un endomorphisme ψ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, que l'on exprimera en fonction de φ.

b Montrer que Ω est stable par φ, *i.e.* $\varphi(\Omega) \subset \Omega$. On note f la restriction au départ et à l'arrivée de φ à Ω.

c Que vaut $f^2 - af + be$?

D.3 La suite de Fibonacci est définie par ses termes initiaux $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

pour tout entier naturel n.

a Exprimer le terme général u_n de la suite de Fibonacci en fonction de n.

b Donner un équivalent simple de la suite de Fibonacci.

Partie E – Exemple fonctionnel

Ici, E est l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et admettant des dérivées à tous ordres sur l'intervalle $]0,+\infty[$, et u l'application de E dans E qui, à toute fonction f de E, associe la fonction g définie par

$$\forall\, x \in]0,+\infty[, \quad g(x) = xf'(x)$$

E.1 Montrer que u est un endomorphisme de E.

E.2 On se donne un réel k. Montrer que l'ensemble F des vecteurs g de E pour lesquels $u^2(g) = ku(g)$ est un sous-espace vectoriel de E.

E.3 Montrer que F est l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle $\mathcal{E}_k$, linéaire d'ordre 2 (à coefficients non constants !), que l'on explicitera.

E.4 Résoudre $\mathcal{E}_k$ sur $\mathbb{R}_+^*$.