# Corrigé de devoir non surveillé

## Problème – Endomorphismes vérifiant $u^2 = ku$

### Partie A – Généralités

**A.1**

**a** L'existence est assurée par la définition d'une homothétie. Si $f$ admet $\lambda$ et $\mu$ pour rapports, alors $\lambda e = \mu e$, puis $(\lambda - \mu)e = 0$. Comme $E$ n'est pas réduit à son vecteur nul, $e \neq 0$, donc $\lambda - \mu = 0$ : l'unicité est montrée.

**b** Si le rapport $\lambda$ de $f$ n'est pas nul, alors $f$ admet $\dfrac{1}{\lambda}e$ pour inverse. Si $\lambda = 0$, alors $f$ est nulle, donc non inversible (car $E$ n'est pas réduit à son vecteur nul).

**A.2**

**a** Si $u$ est inversible, $u$ est alors l'homothétie de rapport $k$ sur $E$. Réciproquement, cette homothétie est bien élément de $A_k$. $A_k$ admet un élément inversible si et seulement si $k \neq 0$, et cet élément est, le cas échéant, l'homothétie de rapport $k$.

**b** Si $x = u(y) \in \operatorname{Im} u$, alors $u(x) = u(u(y)) = ku(y) = kx$.

**c** Un élément $x$ commun à $\Im u$ et $\operatorname{Ker} u$ vérifie $u(x) = 0$ et $u(x) = kx$. Si $k \neq 0$, on a donc $\operatorname{Ker} u \cap \Im u = \{0\}$. De plus, tout vecteur $x$ de $E$ peut s'écrire $x = (x - \frac{1}{k}u(x)) + \frac{1}{k}u(x)$, donc comme somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} u$ (à savoir $x - \frac{1}{k}u(x)$) et d'un vecteur de $\operatorname{Im} u$ (à savoir $\frac{1}{k}u(x)$) : $\operatorname{Ker} u$ et $\Im u$ sont des sous-espaces supplémentaires dans $E$. Si $k = 0$, on a bien sûr $\Im u \subset \operatorname{Ker} u$.

### Partie B – Éléments de $A_k$ commutant

**B.1** Si $uv + vu = 0$, alors $kuv + uvu = 0$, $uvu + kvu = 0$ (en composant à gauche puis à droite par $u$). Comme $k \neq 0$, on en déduit facilement que $uv = vu = 0$.

**B.2**

**a** $u + v \in A_k$ si et seulement si $(u + v)^2 = k(u + v)$, *i.e.* $uv + vu = 0$, soit encore $uv = vu = 0$ d'après la question précédente (l'implication $(uv = vu = 0) \Rightarrow uv + vu = 0$ étant évidente).

**b** Bien sûr, $\operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$. Pour l'inclusion inverse, remarquons que si $x = u(y) \in \operatorname{Im} u$, alors $x = \frac{1}{k}(u + v)(u(y)) \in \operatorname{Im}(u + v)$, donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im}(u + v)$. De même, $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im}(u + v)$, et donc $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im}(u + v)$.

**c** Bien sûr, $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker}(u + v)$. Pour l'inclusion inverse, remarquons que si $x \in \operatorname{Ker}(u + v)$, alors en composant à gauche par $u$, on a $ku(x) = 0$ et donc, puisque $k \neq 0$, $x \in \operatorname{Ker} u$. De même $x \in \operatorname{Ker} v$, donc $\operatorname{Ker}(u + v) \subset \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v$.

**B.3** Si $uv = vu$, alors $(uv)^2 = uvuv = u^2v^2 = k^2uv$ appartient à l'ensemble $A_{k^2}$.

On a évidemment $\operatorname{Im} uv \subset \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} uv \subset \operatorname{Im} v$ (puisque $uv = vu$) donc $\operatorname{Im} uv \subset \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v$. Si $x = u(y) = v(z) \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v$, alors $kx = u(x) = uv(z)$. Puisque $k \neq 0$, $x \in \operatorname{Im} uv$ : $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} uv$.

On a évidemment $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} uv$ et $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} uv$ (puisque $uv = vu$), donc $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} uv$. Si $x \in \operatorname{Ker} uv$, alors $x = (x - \frac{1}{k}u(x)) + \frac{1}{k}u(x)$, où $x - \frac{1}{k}u(x) \in \operatorname{Ker} u$ et $\frac{1}{k}u(x) \in \operatorname{Ker} v$ : $\operatorname{Ker} uv \subset \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$.

### Partie C – Celle du milieu

**C.1** Soit $\lambda$ et $\mu$ deux réels tels que $\lambda f + \mu e = 0$. Par hypothèse, $f$ n'est pas une homothétie, ce qui force $\lambda = 0$, ce qui laisse $\mu e = 0$, donc $\mu = 0$ (car $e \neq 0$).

**C.2** $f - \lambda e \in A_k$ si et seulement si

$$f^2 - 2\lambda f + \lambda^2 e = k(f - \lambda e)$$

*i.e.* $f^2 - (2\lambda + k)f + (\lambda^2 + k\lambda)e = 0$, soit encore (puisque $f^2 - af + be = 0$) :

$$(a - (2\lambda + k))f + (\lambda^2 + k\lambda - b)e = 0$$

*i.e.*, puisque $f$ et $e$ sont linéairement indépendants :

$$a = 2\lambda + k \text{ et } b = \lambda^2 + k\lambda$$

soit enfin :

$$\lambda^2 - a\lambda + b = 0 \text{ et } k = a - 2\lambda$$

**C.3** Le polynôme $X^2 - aX + b$ admet deux racines réelles distinctes si et seulement si son discriminant $a^2 - 4b$ est strictement positif : $u$ et $v$ comme dans l'énoncé existent si et seulement si $a^2 - 4b > 0$. Les racines $\lambda_1$ et $\lambda_2$ vérifient $\lambda_1 + \lambda_2 = a$ et $\lambda_1\lambda_2 = b$.

**C.4** Bien entendu, $u$ et $v$ commutent (puisque ce sont des polynômes en $f$), et donc $uv = vu = 0$.

**C.5** On peut raisonner par récurrence, mais aussi utiliser la formule du binôme de Newton. On a

$$f = \frac{\lambda_1 v - \lambda_2 u}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

(si on ne « voit » pas cette formule, l'énoncé nous la donne en prenant $p = 1$).

Comme $uv = vu = 0$, (et $u^p = k_1^{p-1}u$, $v^p = k_2^{p-1}v$) on a d'après la formule du binôme de Newton :

$$f^p = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)^p k_2^{p-1}v + \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)^p k_1^{p-1}u$$

Remarquons que $k_2\lambda_1 = \lambda_1(a - 2\lambda_2) = \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)$ et de même $k_1\lambda_2 = \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)$, et donc

$$f^p = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1^p v - \lambda_2^p u\right) = \frac{\lambda_1^p - \lambda_2^p}{\lambda_1 - \lambda_2} f + \frac{\lambda_2\lambda_1^p - \lambda_1\lambda_2^p}{\lambda_2 - \lambda_1} e$$

**C.6** Si $b \neq 0$, alors $f$ est inversible d'inverse $-\frac{1}{b}(f - ae)$. Si $b = 0$, $f$ inversible entraînerait $f = ae$, ce qui n'est pas. $f$ est donc inversible si et seulement si $b \neq 0$, son inverse valant alors $-\frac{1}{b}(f - ae)$.

## Partie D – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

**D.1**

**a** Si $u$ et $u'$ sont deux suites réelles, $\lambda$ et $\lambda'$ deux réels, alors $\varphi(\lambda u + \lambda' u')$ est de terme général $\lambda u_{n+1} + \lambda' u'_{n+1}$, tout comme $\lambda\varphi(u) + \lambda'\varphi(u')$.

$\varphi$ est un endomorphisme.

**b** $\varphi$ n'est pas injectif, son noyau est l'ensemble des suites nulles à partir du deuxième terme.

$\varphi$ est surjectif, car une suite réelle quelconque $u$ est l'image par $\varphi$ de la suite $(0, u_0, u_1, \dots)$.

**c** $(\varphi^p(u))_m = u_{m+p}$.

**D.2**

**a** $\Omega = \mathrm{Ker}(\psi)$, où $\psi = \varphi^2 - a\varphi + be$.

**b** On peut montrer à la main que $\Omega$ est stable par $\varphi$, mais aussi en remarquant que $\varphi$ et $\psi$ commutent (puisque $\psi$ est un polynôme en $\varphi$), et donc que $\Omega = \mathrm{Ker}(\psi)$ est stable par $\varphi$ (si $x \in \mathrm{Ker}(\psi)$, alors $\psi(\varphi(x)) = \varphi(\psi(x)) = 0$, donc $\varphi(x) \in \mathrm{Ker}(\psi)$.

**c** $f^2 - af + be = 0$, puisque $\Omega = \mathrm{Ker}(\psi)$.

**D.3**

**a** On peut utiliser les questions précédentes : les racines de $X^2 - X - 1$ sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. D'après C.5, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = (f^n(u))_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

**b** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ et $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, donc $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \mathrm{o}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Un équivalent simple de la suite de Fibonacci est donc $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

## Partie E – Exemple fonctionnel

**E.1** $u$ est un endomorphisme de $E$, car égal à la composée $m_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}} \circ D$, où $D$ est l'endomorphisme dérivation et $m_{Id_{\mathbb{R}_+^*}}$ l'endomorphisme multiplication par la fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$ (identité de $\mathbb{R}_+^*$).

**E.2** $F = \mathrm{Ker}(u^2 - ku)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**E.3** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, tout $g \in E$,

$$u^2(g)(x) = x^2 g''(x) + xg'(x) \quad \text{et} \quad ku(g)(x) = kxg'(x),$$

donc $F$ est l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$xy'' + (1-k)y' = 0.$$

**E.4** L'ensemble des solutions de cette équation différentielle (sur $\mathbb{R}_+^*$) est :

$$F = \{x \mapsto \lambda x^k + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

si $k \neq 0$, et

$$F = \{x \mapsto \lambda \ln(x) + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

si $k = 0$.