Corrigé de devoir non surveillé

Sur les fonctions lipschitziennes

Partie A – Généralités sur les fonctions lipschitziennes

Pour tout élément φ de $\mathcal{L}$, K_φ désignera un réel tel que φ soit K_φ-lipschitzienne.

A.1 La fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ est 0-lipschitzienne, donc $\mathcal{L}$ n'est pas vide. Si f et g sont des éléments de $\mathcal{L}$, et λ et μ sont deux réels quelconques, alors, pour tous réels x et y, on a :

$$|(\lambda f+\mu g)(y)-(\lambda f+\mu g)(x)| \leqslant (|\lambda|K_f+|\mu|K_g)|y-x|$$

$\mathcal{L}$ est donc stable par combinaison linéaire.

A.2 Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}$, alors leur composée $g\circ f$, élément de $\mathcal{F}$, est (K_gK_f)-lipschitzienne, et appartient donc à $\mathcal{L}$.

A.3 Soit f et g deux fonctions bornées de $\mathcal{L}$. Soit M_f et M_g deux réels tels que $|f| \leqslant M_f$ et $|g| \leqslant M_g$. Pour tous réels x et y, on a :

$$|(fg)(y)-(fg)(x)| = |f(y)g(y)-f(x)g(x)| = |f(y)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(x)-f(x)g(x)|$$

$$\leqslant |f(y)g(y)-f(y)g(x)|+|f(y)g(x)-f(x)g(x)| = |f(y)||g(y)-g(x)|+|g(x)||f(y)-f(x)|$$

$$\leqslant (M_fK_g+M_gK_f)|y-x|$$

Le produit fg est donc un élément de $\mathcal{L}$.

Si f et g ne sont pas toutes les deux bornées, fg n'est pas nécessairement un élément de $\mathcal{L}$, comme le montre l'exemple où $f=g=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (la fonction carré n'est pas lipschitzienne car la suite des taux d'accroissement de cette fonction entre n et $n+1$ (de terme général $2n+1$) n'est pas bornée).

A.4 Soit $f\in\mathcal{L}$. On a en particulier, pour tout réel x,

$$|f(x)| = |f(x)-f(0)+f(0)| \leqslant |f(x)-f(0)|+|f(0)| \leqslant K_f|x|+|f(0)|.$$

Il existe donc deux réels positifs A et B (par exemple $A=K_f$ et $B=|f(0)|$) tels que pour tout réel x, on ait :

$$|f(x)| \leqslant A|x|+B.$$

A.5 Soit $f\in\mathcal{F}$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que pour tous réels x et y vérifiant $|y-x|\leqslant 1$, on ait $|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|$. Soit x et y deux réels vérifiant $x+1<y$. L'idée est d'intercaler les entiers entre x et y. Soit $[\![p,q]\!]$ l'ensemble des entiers strictement compris entre x et y. On a

$$|f(y)-f(x)| = |f(y)-f(q)+\sum_{k=p}^{q-1}(f(k+1)-f(k))+f(p)-f(x)| \leqslant |f(y)-f(q)|+\sum_{k=p}^{q-1}|f(k+1)-f(k)|+|f(p)-f(x)|$$

$$\leqslant M(y-q+\sum_{k=p}^{q-1}((k+1)-(k))+p-x) = M(y-x).$$

Par conséquent, f est M-lipschitzienne, et appartient donc à $\mathcal{L}$.

A.6 L'application t_α de translation par α est 1-lipschitzienne, donc la composée $f\circ t_\alpha : x\mapsto f(x+\alpha)$, est un élément de $\mathcal{L}$.

A.7 D'après les rappels, et comme cosinus est majorée par 1 en valeur absolue, on a, pour tous réels x et y,

$$|\sin(y)-\sin(x)| = \left|2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)\right|$$

$$\leqslant 2\left|\frac{y-x}{2}\right| = |y-x|.$$

La fonction sinus est donc 1-lipschitzienne.

De la relation $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (valable pour tout réel x), et de la question précédente, on déduit que la fonction cosinus est également 1-lipschitzienne.

A.8 Voir le cours (la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$, bien qu'uniformément continue sur $\mathbb{R}$, n'est pas lipschtizienne).

Partie B – Une équation fonctionnelle dans $\mathcal{L}$

B.1 Soit $F \in \mathcal{F}$ vérifiant $\mathcal{E}$.

Comme F est solution de $\mathcal{E}$, la formule annoncée est vraie pour $n = 1$.

De plus, si la formule est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$, alors, pour tout réel x, on a :

$$F(x) = \lambda^n(F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) = \lambda^n\left(\lambda F(x+na+a) + f(x+na)\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka)$$

$$= F(x+(n+1)a) + \sum_{k=0}^{n} \lambda^k f(x+ka)$$

La formule est donc vérifiée au rang $n+1$.

On en déduit donc par récurrence que pour tout réel x, et tout entier naturel non nul n, on a :

$$F(x) = \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka).$$

B.2 On suppose ici $|\lambda| < 1$.

a On suppose que F et G sont deux solutions de $\mathcal{E}$ appartenant à $\mathcal{L}$. On sait d'après A.4 qu'il existe des réels positifs A, B, C, D tels que $|F(x)| \leqslant A|x| + B$ et $|G(x)| \leqslant C|x| + D$, pour tout réel x. D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel non nul n, et tout réel x :

$$|F(x) - G(x)| = |\lambda^n(F(x+na) - G(x+na))| \leqslant |\lambda|^n\left((|A| + |C|)|x+na| + |B| + |D|\right)$$

Quand n tend vers l'infini, le membre de droite tend vers 0 (car $|\lambda| < 1$). On a donc $F(x) = G(x)$.

$\mathcal{E}$ admet donc au plus une solution dans $\mathcal{L}$.

b Une solution de $\mathcal{E}$ est la fonction constante de valeur $\frac{1}{1-\lambda}$. Cette application est évidemment lipschitzienne. D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}$ est donc le singleton

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{1-\lambda}\right\}.$$

c La fonction G (bien définie car $1 - 2\lambda\cos(a) + \lambda^2 = (1-\lambda e^{ia})(1-\lambda e^{-ia}) \neq 0$) appartient à $\mathcal{L}$, en tant que combinaison linéaire de telles fonctions. De plus, pour tout réel x, on a

$$G(x) - \lambda G(x+a) = \frac{\cos(x) - \lambda\cos(x-a) - \lambda\cos(x+a) + \lambda^2\cos(x)}{1 - 2\lambda\cos(a) + \lambda^2} = \cos(x).$$

G est donc une solution de $\mathcal{E}$ appartenant à $\mathcal{L}$: c'est l'unique telle fonction. L'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$ appartenant à $\mathcal{L}$ est donc ici le singleton $\{G\}$.

d De l'égalité $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (valable pour tout réel x), et d'après la forme de $\mathcal{E}$, on déduit de la question précédente que l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$ dans le cas où f est la fonction sinus est le singleton $\{H\}$, où, pour tout réel x,

$$H(x) = \frac{\sin(x) - \lambda\sin(x-a)}{1 - 2\lambda\cos(a) + \lambda^2}$$

B.3 On suppose ici $\lambda = 1$.

a S'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant $\mathcal{E}$, alors

$$|f(x)| = |F(x) - F(x+a)| \leqslant K_F|a|$$

pour tout réel x, et f est donc bornée.

b $F : x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ est non nulle, lipschitzienne (car composée de telles fonctions) et a-périodique, donc vérifie $F(x) - F(x+a) = 0$, pour tout réel x.

c Si H est une solution de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}$, alors toutes les fonctions $H + nF$ (où F est la fonction définie à la question précédente), où n décrit $\mathbb{N}$, sont distinctes deux à deux, appartiennent à $\mathcal{L}$, et vérifient $\mathcal{E}$.

d L'idée est de faire tendre λ vers 1 dans l'expression de G en B.2.c. On vérifie ensuite que la fonction obtenue

$$\psi : x \mapsto \frac{\cos(x) - \cos(x-a)}{2(1-\cos(a))},$$

est bien une solution de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}$.

e Si $\cos(a) = 1$, a est un multiple entier non nul de 2π : $a = 2k\pi$, pour un certain entier non nul k. Supposons que $\mathcal{E}$ admette une solution F dans $\mathcal{L}$. On a alors

$$F(x) = F(x + 2kn\pi) + n\cos(x)$$

pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, d'après B.1. Ceci donne en particulier (en prenant $x = 0$ puis $x = \pi$), pour tout entier naturel n :

$$F((2kn+1)\pi) - F(2nk\pi) = 2n + F(\pi) - F(0)$$

La suite des taux d'accroissement de F entre $2kn\pi$ et $(2kn+1)\pi$ ($n \in \mathbb{N}^*$) n'est donc pas bornée : F ne peut être lipschitzienne.