

Devoir non surveillé

Exercice 1 : Fonctions presque doublement surjectives

E et F désignent deux ensembles non vides, f une application de E dans F . On dit que f est :

- *doublement surjective* si tout élément de F admet au moins deux antécédents par f dans E .
- *presque surjective* si tout élément de F , sauf peut-être un, admet au moins un antécédent par f dans E .
- *presque doublement surjective* si tout élément de F , sauf peut-être un, admet au moins deux antécédents par f dans E .

1 Exprimer dans le registre formel le fait que f soit presque doublement surjective.

2 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$, et $h : z \mapsto az^2 + bz + c$ (fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C}).

Montrer que h est surjective, presque doublement surjective, mais non doublement surjective.

3

a Montrer que la composée de deux applications presque doublement surjectives est presque doublement surjective.

b Montrer que la composée de deux applications presque surjectives n'est pas nécessairement presque surjective.

Indication : on pourra considérer l'application f , de $\{-1, 0, 1\}$ dans lui-même, telle que $f(0) = f(1) = 1$ et $f(-1) = 0$.

c Montrer que l'application $\varphi : z \mapsto e^{(e^z)}$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est presque surjective.