Devoir non surveillé

Fonctions à variations bornées

Dans ce problème, sauf mention contraire, n désigne un entier naturel non nul, I désignera un intervalle d'intérieur non vide, f sera une fonction de I dans $\mathbb{R}$, a et b seront des points de I, avec $a < b$.

On dit que f est à *variations bornées* si elle s'écrit comme somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante, *i.e.* s'il existe $g, h \in \mathbb{R}^I$, respectivement croissante et décroissante, telles que $f = g + h$.

On note $\mathcal{V}B(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à variations bornées de I dans $\mathbb{R}$.

Soit $a, b \in I$, où $a < b$, $\sigma = (x_k)_{k \in [\![0,p]\!]}$ une subdivision de $[a, b]$. On pose :

$$l(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{p-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

On dit que f est de *longueur bornée* sur le segment $[a, b]$ s'il exite $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour toute subdivision σ de $[a, b]$, $l(\sigma, f) \leqslant \Lambda$, *i.e.* l'ensemble $\{l(\sigma, f), \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$ est majoré. Dans ce cas, on note $L_a^b(f)$ la borne supérieure de cet ensemble :

$$L_a^b(f) = \sup\{l(\sigma, f), \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}.$$

On pose également $L_b^a(f) = -L_a^b(f)$ et $L_a^a(f) = 0$.

Partie A – Généralités

A.1 Montrer que toute fonction monotone est à variations bornées.

A.2

a Montrer que si f est monotone, alors f est de longueur bornée sur $[a, b]$, et que :

$$|f(b) - f(a)| = L_a^b(f).$$

b Montrer que toute fonction lipschitzienne de I dans $\mathbb{R}$ est de longueur bornée sur $[a, b]$.

c On suppose f de longueur bornée sur $[a, b]$. Montrer :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant L_a^b(f).$$

A.3 Montrer que $\mathcal{V}B(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$, engendré par les fonctions croissantes.

Partie B – Fonctions de longueur bornée

On considère des applications f et g de I dans $\mathbb{R}$, trois éléments a, b et c de I tels que $a < c < b$.

B.1 On suppose f et g de longueur bornée sur $[a, b]$. Montrer que $f + g$ est de longueur bornée sur $[a, b]$, et que :

$$L_a^b(f + g) \leqslant L_a^b(f) + L_a^b(g).$$

B.2 Montrer que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ si et seulement si elle l'est sur $[a, c]$ et $[c, b]$, et qu'alors :

$$L_a^b(f) = L_a^c(f) + L_c^b(f).$$

On déduit (inutile de le démontrer) de la relation précédente la *relation de Chasles* suivante, valable pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in I^3$ (si f est de longueur bornée) :

$$L_\alpha^\gamma(f) = L_\alpha^\beta(f) + L_\beta^\gamma(f).$$

Partie C – Variations bornées *vs* longueur bornée

C.1 Montrer que si f est à variations bornées sur I, alors elle est de longueur bornée sur tout segment inclus dans I.

C.2 Supposons, réciproquement, que f soit de longueur bornée sur tout segment inclus dans I. On choisit λ dans I, et on définit les fonctions g et h de I dans $\mathbb{R}$ par, pour tout $t \in I$:

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) + L_\lambda^t(f)\right) \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) - L_\lambda^t(f)\right).$$

Prouver à l'aide de g et h, que f est à variations bornées sur I.

Ainsi, on a démontré que f est à variations bornées sur I si et seulement si f est de longueur bornée sur tout segment inclus dans I.

C.3 Montrer que toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (à valeurs réelles) est à variations bornées.

Partie D – Un exemple de fonction dérivable et bornée mais non à variations bornées

Dans cette partie f désigne la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x^2 \sin(1/x^2).$$

D.1

a Donner la valeur de f en 0, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner $f'(x)$ pour tout réel x.

b La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

D.2 On considère la suite de terme général $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que (h_n) diverge et $h_n \sim \ln(n)$.

Indication : on pourra utiliser, en le justifiant, l'encadrement (pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

D.3 On considère la suite de terme général $v_n = \ln\left(\frac{4n+1}{4n-1}\right)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

a Montrer : $v_n \sim \frac{1}{2n}$.

b Montrer que la suite de terme général $w_n = \sum_{k=1}^n v_k$ diverge vers $+\infty$.

Indication : on pourra considérer (en justifiant son existence) un rang N à partir duquel $v_n \geqslant \frac{1}{4n}$.

D.4 On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sqrt{\frac{2}{(2n-1)\pi}}$.

a Établir :

$$\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t}\left|\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sqrt{\frac{4}{(4n+1)\pi}}}^{\sqrt{\frac{4}{(4n-1)\pi}}} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

b Montrer

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^{u_1} \frac{1}{t}\left|\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| \mathrm{d}t = +\infty.$$

c Montrer

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 |f'(t)| \mathrm{d}t = +\infty.$$

d En déduire que f n'est pas de longueur bornée sur $[0, 1]$.

Partie E – Extension au cas des fonctions vectorielles

Dans cette dernière partie, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et de sa norme associée $\|\cdot\|$.
Si l'étudiant le souhaite, il pourra ne traiter que le cas où $n = 2$.
Étant donné $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$, et une subdivision $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$ de $[a, b]$, on pose :

$$l(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{p-1} \|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| \,.$$

On dit que f est de *longueur bornée* sur le segment $[a, b]$ s'il exite $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour toute subdivision σ de $[a, b]$, $l(\sigma, f) \leqslant \Lambda$, *i.e.* l'ensemble $\{l(\sigma, f), \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$ est majoré. Dans ce cas, on note $L_a^b(f)$ la borne supérieure de cet ensemble :

$$L_a^b(f) = \sup\{l(\sigma, f), \sigma \text{ subdivision de} [a, b]\}.$$

On pose également $L_b^a(f) = -L_a^b(f)$ et $L_a^a(f) = 0$.

Dans cette partie, on considère deux éléments a et b de I tels que $a < b$, et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note f_i la i-ième fonction composante de f, de sorte que pour tout $t \in I$:

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

E.1 Montrer que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ si et seulement si ses fonctions composantes le sont (toutes), et qu'alors :

$$\max_{i\in[\![1,n]\!]} L_a^b(f_i) \leqslant L_a^b(f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} L_a^b(f_i).$$

E.2 Soit R un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ si et seulement si $R \circ f$ l'est, et qu'alors :

$$L_a^b(R \circ f) = L_a^b(f).$$

On peut montrer (inutile de le faire) comme en B.2, que si f est de longueur bornée sur tout segment inclus dans I, alors on a la relation de Chasles suivante, valable pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in I^3$:

$$L_\alpha^\gamma(f) = L_\alpha^\beta(f) + L_\beta^\gamma(f).$$

On suppose désormais f de classe $\mathcal{C}^1$ *i.e.* toutes ses fonctions composantes le sont.

E.3 Montrer que f est de longueur bornée sur tout segment inclus dans I.

E.4 Soit T un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $T \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et que $(T \circ f)' = T \circ f'$.

E.5 On définit la fonction w pour $x \in I$, par $w(x) = L_a^x(f)$ et on considère $t \in I$.

a Montrer qu'il existe $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ unitaire tel que $f'(t) = \|f'(t)\| \,\vec{u}$.

b Prouver qu'il existe un automorphisme orthogonal R de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$R(\vec{u}) = (1, 0, \dots, 0).$$

On pose alors $g = R \circ f$ et on écrit $g = (g_1, \dots, g_n)$.

c Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et établir :

$$g_1'(t) = \|f'(t)\| \qquad \text{et} \qquad \forall\, i \in [\![2, n]\!], \quad g_i'(t) = 0.$$

d Soit $v \in \mathbb{R}^*$ tel que $t + v \in I$. Prouver que :

$$\frac{1}{v} L_t^{t+v}(g_1) \leqslant \frac{1}{v} L_t^{t+v}(f) \leqslant \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{n} L_t^{t+v}(g_i).$$

e En déduire que w est dérivable en t et que $w'(t) = \|f'(t)\|$.

f Établir

$$L_a^b(f) = \int_a^b \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$