Corrigé de devoir non surveillé

Fonctions à variations bornées

Partie A – Généralités

A.1 La fonction nulle étant à la fois croissante et décroissante, si f est croissante (resp. décroissante), alors la relation $f = f + 0$ (resp. $f = 0 + f$) montre que f est à variations bornées.

A.2

a Supposons f monotone. Pour toute subdivision $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,p]\!]}$ de $[a, b]$, on a :

$$l(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{p-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left|\sum_{k=0}^{p-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k))\right| = |f(b) - f(a)|,$$

donc f est de longueur bornée, et :

$$|f(b) - f(a)| = L_a^b(f).$$

b Soit f une fonction K-lipschitzienne, $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,p]\!]}$ une subdivision de $[a, b]$:

$$l(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{p-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} K|x_{k+1} - x_k| = K(b - a),$$

donc (par propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$), f est de longueur bornée sur $[a, b]$, et :

$$L_a^b(f) \leqslant K(b - a).$$

c En prenant la subdivision $\sigma = (a, b)$ de $[a, b]$, on a $l(\sigma, f) = |f(b) - f(a)|$, montrant :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant L_a^b(f).$$

A.3 $\mathcal{V}B(I, \mathbb{R})$ est clairement une partie de $\mathbb{R}^I$, non vide puisque comprenant la fonction identiquement nulle.

Supposons, pour $i \in \{1, 2\}$, disposer de $f_i = g_i + h_i$ à variations bornées, où g_i et h_i sont respectivement croissante et décroissante.

En écrivant $f_1 + f_2 = (g_1 + g_2) + (h_1 + h_2)$, on constate que $f_1 + f_2$ est à variations bornées.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (resp. $\lambda \in \mathbb{R}_-$), alors, en écrivant $\lambda f_1 = (\lambda g_1) + (\lambda h_1)$, (resp. $\lambda f_1 = (\lambda h_1) + (\lambda g_1)$) on constate que λf_1 est à variations bornées.

Enfin $\mathcal{V}B(I, \mathbb{R})$ comprend les fonctions croissantes, et chacun de ses éléments est une combinaison linéaire de deux fonctions croissantes, le résultat est donc démontré.

Partie B – Fonctions de longueur bornée

B.1 Soit $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,p]\!]}$ une subdivision de $[a, b]$:

$$l(\sigma, f+g) = \sum_{k=0}^{p-1} |(f+g)(x_{k+1})-(f+g)(x_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1}(|f(x_{k+1})-f(x_k)|+|g(x_{k+1})-g(x_k)|) = l(\sigma, f)+l(\sigma, g) \leqslant L_a^b(f)+L_a^b(g).$$

Ceci valant pour toutes subdivision σ de $[a, b]$, $f + g$ est bien de longueur bornée sur $[a, b]$, et :

$$L_a^b(f + g) \leqslant L_a^b(f) + L_a^b(g).$$

B.2 Supposons f de longueur bornée sur $[a, c]$ et $[c, b]$. Soit $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,p]\!]}$ une subdivision de $[a, b]$. Soit k_0 l'entier tel que $c \in [x_{k_0}, x_{k_0+1}]$. En observant que $|f(x_{k_0+1}) - f(x_{k_0})| \leqslant |f(x_{k_0+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k_0})|$, et en considérant les subdivisions σ_a et σ_b de supports respectifs $\{x_0, \dots, x_{k_0}, c\}$ et $\{c, x_{k_0+1}, \dots, x_p$, on obtient

$$l(\sigma, f) \leqslant l(\sigma_a, f) + l(\sigma_b, f) \leqslant L_a^c(f) + L_c^b(f),$$

ce qui montre que f est de longueur bornée sur $[a, b]$, et que

$$L_a^b(f) \leqslant L_a^c(f) + L_c^b(f).$$

Supposons que f soit de longueur bornée sur $[a, b]$, et soit σ_a et σ_b des subdivisions respectives de $[a, c]$ et $[c, b]$. En considérant la subdivision σ dont le support est l'union des supports de σ_a et σ_b, on obtient

$$(*) \quad l(\sigma_a, f) + l(\sigma_b, f) = l(\sigma, f) \leqslant L_a^b(f),$$

en particulier, $l(\sigma_a, f) \leqslant L_a^b(f)$, donc f est de longueur bornée sur $[a, c]$. De même, f est de longueur bornée sur $[c, b]$, puis, en revenant à $(*)$:

$$L_a^c(f) + L_c^b(f) \leqslant L_a^b(f),$$

Ceci montre bien que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ si et seulement si elle l'est sur $[a, c]$ et $[c, b]$, et qu'alors :

$$L_a^b(f) = L_a^c(f) + L_c^b(f).$$

Partie C – Variations bornées *vs* longueur bornée

C.1 Supposons f à variations bornées : elle est somme d'une fonction croissante et d'une décroissante, toutes deux de longueur bornée sur $[a, b]$ en vertu de A.2.a. D'après B.1, f est de longueur bornée sur $[a, b]$.

C.2 Clairement, $f = g + h$. Soit $t, t' \in I$, $t \leqslant t'$:

$$g(t') - g(t) = \frac{1}{2}\left(f(t') - f(t) + L_t^{t'}\right) \geqslant 0$$

grâce à A.2.c, donc g est croissante. De même, h est décroissante, et f est donc à variations bornées sur I.

C.3 f étant de classe $\mathcal{C}^1$, elle est lipschitzienne, et, partant (cf. A.2.b), de longueur bornée sur tout segment inclus dans I. D'après la question précédente, f est à variations bornées.

Partie D – Un exemple de fonction dérivable et bornée mais non à variations bornées

D.1

a La fonction sinus étant bornée, $f(x) = \mathrm{O}(x^2) = \mathrm{o}(x)$ en 0, donc f admet un développement limité en 0 à l'ordre 1, de partie régulière nulle : autrement dit, $f(0) = 0$, f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

f est évidemment dérivable en tout réel non nul x, et

$$f'(x) = 2x\sin(1/x^2) - \frac{2}{x}\cos(1/x^2).$$

b En considérant la suite de terme général $1/\sqrt{n\pi}$, de limite nulle, on constate que f' n'a pas de limite en 0 : f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

D.2 L'encadrement donné en indice provient immédiatement de la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

En utilisant la question précédente, on obtient, en sommant pour k allant de 1 à n (et en utilisant la relation de Chasles) :

$$h_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant h_n,$$

d'où, si $n \geqslant 2$:

$$\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

En divisant par le réél strictement positif $\ln(n)$ (où $n \geqslant 2$), puis en le faisant tendre vers $+\infty$, on obtient bien que (h_n) diverge et $h_n \sim \ln(n)$.

D.3

a $v_n = \ln\left(\frac{1+1/(4n)}{1-1/(4n)}\right) = \ln(1 + 1/(2n) + \mathrm{o}(1/n)) = 1/(2n) + \mathrm{o}(1/n)$, donc $v_n \sim \frac{1}{2n}$.

b Toute suite convergeant vers 1 est minorée, à partir d'un certain rang, par $1/2$ (prendre $\varepsilon = 1/2$ dans l'asssertion formelle de convergence) : il existe donc un rang N à partir duquel $v_n \geqslant \frac{1}{4n}$.

On a donc, pour tout entier $n \geqslant N$: $w_n - w_N \geqslant (h_n - h_N)/4$, puis $w_n \geqslant h_n/4 + w_N - h_N/4$, ce qui montre (grâce à D.2) la divergence de (w_n) vers $+\infty$.

D.4

a Le segment $[u_{n+1}, u_n]$ contient $\left[\sqrt{\frac{4}{(4n+1)\pi}}, \sqrt{\frac{4}{(4n-1)\pi}}\right]$, segment sur lequel $t \mapsto |\cos(1/t^2)|$ est minorée par $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t}\left|\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\sqrt{\frac{4}{(4n+1)\pi}}}^{\sqrt{\frac{4}{(4n-1)\pi}}} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

b Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, et par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_{u_{N+1}}^{u_1} \frac{1}{t}\left|\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| \mathrm{d}t &\geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\sqrt{\frac{4}{(4n+1)\pi}}}^{\sqrt{\frac{4}{(4n-1)\pi}}} \frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{4n+1}{4n-1}\right),\end{aligned}$$

donc, d'après D.3.b

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{u_{N+1}}^{u_1} \frac{1}{t}\left|\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| \mathrm{d}t = +\infty.$$

Comme $x \mapsto \int_x^{u_1} \frac{1}{t}\left|\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| \mathrm{d}t$ est décroissante (puisque la fonction intégrée est positive) : cette fonction a une limite en 0^+, qui vaut $+\infty$ d'après ce qui précède :

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{x}^{u_1} \frac{1}{t}\left|\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| \mathrm{d}t = +\infty.$$

c Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. D'après D.1.a et l'inégalité triangulaire,

$$\frac{1}{t}\left|\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| \leqslant t|\sin(1/t^2)| + \frac{1}{2}|f'(t)|\mathrm{d}t.$$

Or $t \mapsto t|\sin(1/t^2)|$ est prolongeable par continuité en 0, donc $\int_x^{u_1} t|\sin(1/t^2)|\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers 0^+.

D'après la question précédente, il vient bien :

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 |f'(t)|\mathrm{d}t = +\infty.$$

d Raisonnons par l'absurde, en supposant f de longueur bornée sur $[0,1]$. Soit $x \in]0,1[$. On a :

$$\int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t = L_0^x(f) = L_0^1(f) - L_x^1(f) \leqslant L_0^1(f),$$

ce qui conduit (grâce à la question précédente) à une absurdité lorsqu'on fait tendre x vers O^+.

Partie E – Extension au cas des fonctions vectorielles

E.1 Ce résultat provient naturellement des inégalités

$$\max_{i\in[\![1,n]\!]} |y_i| \leqslant \|y\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |y_i|,$$

valables pour tout $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que f est de longueur bornée sur $[a,b]$ si et seulement si ses fonctions composantes le sont (toutes), et qu'alors :

$$\max_{i\in[\![1,n]\!]} L_a^b(f_i) \leqslant L_a^b(f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} L_a^b(f_i).$$

E.2 Soit $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$ une subdivision de $[a,b]$. Comme R conserve les distances,

$$\begin{aligned}
l(\sigma, R\circ f) &= \sum_{k=0}^{p-1} \|(R\circ f)(x_{k+1}) - (R\circ f)(x_k)\| \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \|R(f(x_{k+1})) - R(f(x_k))\| \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| \\
&= l(\sigma, f).
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement le résultat voulu.

E.3 $f_1, \ldots, f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc de longueur bornée sur tout segment inclus dans I, donc f itou.

E.4 Les fonctions composantes de $T\circ f$ sont des combinaisons linéaires de celles de f, et sont donc également de classe $\mathcal{C}^1$. On sait de plus que f admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point t de I, et

$$f(t+\Delta t) = f(t) + f'(t)\Delta(t) + \mathrm{o}(\|\Delta t\|).$$

En appliquant l'application linéaire T, il vient :

$$(T\circ f)(t+\Delta t) = (T\circ f)(t) + (T\circ f')(t)\Delta t + \mathrm{o}(\|\Delta t\|).$$

(on a utilisé le fait (immédiat en considèrant la matrice canoniquement associée) que T était continue en 0 afin d'écrire $T(\mathrm{o}(\|\Delta t\|)) = \mathrm{o}(\|\Delta t\|)$.) Par ailleurs, $T\circ f$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, elle admet pour développement limité à l'ordre 1 en t :

$$(T\circ f)(t+\Delta t) = (T\circ f)(t) + (T\circ f)'(t)\Delta t + \mathrm{o}(\|\Delta t\|).$$

Ainsi a-t-on, par unicité du développement limité : $(T\circ f)'(t) = T\circ f'(t)$, puis, ceci valant pour tout $t\in I$

$$(T\circ f)' = T\circ f'.$$

E.5

a Si $f'(t) \neq \overrightarrow{0}$, alors (seul) le normalisé de $f'(t)$ convient, et, si $f'(t) = \overrightarrow{0}$, alors tout vecteur unitaire convient.

b On complète $\vec{u}$ et $(1,0,\ldots,0)$ en des bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Il existe un (unique) automorphisme R envoyant $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$. De plus R est orthogonal car ces deux bases sont orthonormées.

c D'après E.4, g est de classe $\mathcal{C}^1$, et $g'(t) = R(f'(t)) = \|f'(t)\|\, R(\vec{u}) = (\|f'(t)\|, 0, \ldots, 0)$, d'où le résultat souhaité.

d g est de classe $\mathcal{C}^1$, donc de longueur bornée sur le segment d'extrémités t et $t+v$. On peut donc lui appliquer E.1, obtenant

$$L_t^{t+v}(g_1) \leqslant L_t^{t+v}(g) \leqslant \sum_{i=1}^{n} L_t^{t+v}(g_i)$$

si $v > 0$, et

$$\sum_{i=1}^{n} L_t^{t+v}(g_i) \leqslant L_t^{t+v}(g) \leqslant L_t^{t+v}(g_1)$$

sinon.

Comme $L_t^{t+v}(g) = L_t^{t+v}(f)$ (car R est orthogonal), on obtient bien l'encadrement voulu.

e Pour toute fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$, on a, en conservant les notations précédentes :

$$\frac{1}{v} L_t^{t+v}(h) = \frac{1}{v}\int_t^{t+v} |h'(u)|\mathrm{d}u \longrightarrow_{v\to 0} |h'(t)|.$$

En observant également que $\frac{1}{v}L_t^{t+v}(f) = \frac{1}{v}(w(t+v) - w(t))$ et grâce à la question précédente, on constate que w est dérivable en t, et que $w'(t) = \|f'(t)\|$.

f La question précédente montre notamment que w est de classe $\mathcal{C}^1$ (sa dérivée $\|f'\|$ est continue puisque la norme est continue et f est de classe $\mathcal{C}^1$), donc

$$L_a^b(f) = w(b) - w(a) = \int_a^b w'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$