Corrigé de devoir non surveillé

Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : Perpendiculaire commune

1 La droite $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}'$ est dirigée par $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

2 Le plan contenant $\mathcal{D}$ et Δ passe par $M(2,-1,0)$, et est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$: il est donc d'équation

$$\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 5 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

soit encore $\boxed{5x - 4y - 13z - 14 = 0.}$

3 Le plan contenant $\mathcal{D}'$ et Δ passe par $M'(1,0,1)$, et est dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$: il est donc d'équation

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 5 \\ y & 1 & 3 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

soit encore $\boxed{-5x + 11y - 8z + 13 = 0.}$

Exercice 2 : Un cercle dans l'espace (d'après Centrale PSI 06)

1 Comme

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y = (x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 - 13,$$

(pour tous réels x, y, z), S est la sphère de centre $\Omega(2,3,0)$, et de rayon $r = \sqrt{13}$.

$$d(\Omega, P) = \frac{|2+3+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} < \sqrt{13} = r,$$

donc $\boxed{\text{l'intersection de } P \text{ et } S \text{ est un cercle.}}$

2 Le rayon R de C vaut $\sqrt{r^2 - d(\Omega, P)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{23}{3}}.}$

3 Le centre Ω' de C est le projeté orthogonal de Ω sur P. Il existe donc un unique réel λ tel que $\Omega' = \Omega + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On détermine ce réel λ par la condition $\Omega' \in P$, qui fournit

$$(2+\lambda) + (3+\lambda) + \lambda = 1,$$

soit $\lambda = -4/3$.