Devoir non surveillé

Exercice 1 : Groupes de racines de l'unité

On note $\mathbb{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité.

1

a Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini commutatif d'ordre n, d'élément neutre e_G. Montrer que pour tout $g \in G$, $g^n = e_G$.

b Soit G un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$. Montrer l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $G = \mathbb{U}_n$.

2 Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$.

a Montrer que $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$ si et seulement si m divise n.

b Montrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{m \wedge n}$.

c Montrer que le sous-groupe de $\mathbb{U}$ engendré [1] par $\mathbb{U}_m \cup \mathbb{U}_n$ est $\mathbb{U}_{m \vee n}$.

3 Soit p un nombre premier et $G_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_{p^n}$.

a Montrer que G_p est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.

b Montrer que G_p est infini, mais que tous ses sous-groupes propres (*i.e.* distincts de G_p) sont finis.

c On dit qu'un sous-groupe propre H de G_p est *maximal* si les seuls sous-groupes de G_p contenant H sont H et G_p. Montrer que G_p n'admet pas de sous-groupe (propre) maximal.

1. *i.e.* le plus petit sous-groupe (pour l'inclusion) de $\mathbb{U}$ contenant $\mathbb{U}_m$ et $\mathbb{U}_n$