Corrigé de devoir non surveillé

Isométries et groupes diédraux

Partie A – Isométries du plan

A.1 $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}} \in \mathcal{I}(\mathcal{P})$, donc $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ n'est pas vide. Si f et g sont deux isométries quelconques du plan, et M et N deux points quelconques du plan, alors

$$((fg)(M))((fg)(N)) = (f(g(M)))(f(g(N))) = g(M)g(N) = MN$$

Si f est en outre bijective, alors

$$f^{-1}(M)f^{-1}(N) = f(f^{-1}(M))f(f^{-1}(N)) = MN$$

Ainsi, la composée de deux isométries est une isométrie, et si f est une isométrie bijective, alors sa bijection réciproque est une isométrie.

A.2 Bien sûr, l'identité du plan est une isométrie du plan fixant trois points non alignés.

Rappelons que l'intersection de deux cercles de centres distincts K et K' est soit vide, soit réduite à un point, soit constituée de deux points distincts M et N, et qu'alors K et K' appartiennent à la médiatrice de $[MN]$.

Soit f une isométrie fixant trois points non alignés A, B, C. Soit M un point quelconque du plan, et $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_C$ les cercles de centres respectifs A, B, C, et passant par M. Ces cercles non concentriques se rencontrent en M par construction, et leur intersection ne peut être de cardinal 2 (puisque A, B, C ne sont pas alignés). Or l'image $f(M)$ de M par f appartient nécessairement à chacun de ces trois cercles (par exemple, $f(M) \in \mathcal{C}_A$ car $f(M)A = f(M)f(A) = MA$), donc $f(M) = M$. f est l'application $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.

L'unique isométrie fixant trois points non alignés est l'identité.

A.3

a Soit $M(z)$ et $N(z')$ deux points quelconques du plan donnés avec leurs affixes. Si φ est directe, on a :

$$\varphi(M)\varphi(N) = |az' + b - (az + b)| = |a(z' - z)| = |a||z' - z| = |z' - z| = MN$$

De même si φ est indirecte.

Par ailleurs, φ est bijective (de réciproque d'expression complexe $z \mapsto \frac{z-b}{a}$ si φ est directe, $z \mapsto \overline{\left(\frac{z-b}{a}\right)}$ si φ est indirecte).

φ est donc bien une isométrie bijective.

b Notons $z_{A'}, z_{B'}$ et $Z_{C'}$ les affixes respectives de A', B', C'. D'après les hypothèses de l'énoncé, il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \varepsilon i,$$

soit $z_{C'} = \varepsilon i(z_{B'} - z_{A'}) + z_{A'}$.

La similitude φ d'expression complexe $z \mapsto (z_{B'} - z_{A'})z + z_{A'}$ si $\varepsilon = 1$ (resp. $z \mapsto (z_{B'} - z_{A'})\bar{z} + z_{A'}$ si $\varepsilon = -1$) est de rapport 1 (car $A'B' = 1$), et envoie A, B, C sur A', B', C' respectivement.

A.4 On a déjà vu que toute similitude de rapport 1 était une isométrie du plan. Si réciproquement f est une isométrie quelconque du plan, il existe une similitude φ de rapport 1 telle que

$$\varphi(A) = f(A), \quad \varphi(B) = f(B) \quad \text{et} \quad \varphi(C) = f(C)$$

(le triangle $f(A)f(B)f(C)$ est clairement isocèle rectangle, d'hypothénuse $[f(B)f(C)]$ de longueur $\sqrt{2}$).

L'isométrie $\varphi^{-1} \circ f$ fixe les trois points non alignés A, B et C : c'est donc l'identité, et par conséquent $f = \varphi$.

Finalement, l'ensemble des isométries du plan est l'ensemble des similitudes de rapport 1.

Partie B – Groupes diédraux

B.1 D_n n'est pas vide, car comprend l'identité. Si f, g sont des éléments de D_n, alors fg et f^{-1} sont des isométries du plan, et, comme $f(P_n) = g(P_n) = P_n$, on a :

$$(fg)(P_n) = f(g(P_n)) = f(P_n) = P_n \quad \text{et} \quad f^{-1}(P_n) = P_n$$

B.2

a $r : z \mapsto e^{\frac{2i\pi}{n}} z$. Bien sûr, $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ est un élément de D_n. ρ est une rotation envoyant les sommets $A_1, \ldots, A_n$ sur $A_2, \ldots, A_n, A_1$ respectivement, donc les segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $\ldots$,$[A_{n-1}A_n]$, $[A_nA_1]$ sur $[A_2A_3]$, $\ldots$, $[A_{n-1}A_n]$, $[A_nA_1]$, $[A_1A_2]$ respectivement : on a bien $\rho \in D_n$. Une récurrence immédiate montre alors que $\rho^2, \ldots, \rho^{n-1}$ appartiennent à D_n. Bien sûr, ρ^n est l'application identique de $\mathcal{P}$.

b s est la conjugaison complexe, et $\sigma \in D_n$. Les composées $\sigma, \rho\sigma, \ldots, \rho^{n-1}\sigma$ d'éléments de D_n sont des éléments de D_n. $(\rho\sigma)^2$ est d'expression complexe $z \mapsto e^{\frac{2i\pi}{n}} \overline{\left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \bar{z}\right)} = z$: $(\rho\sigma)^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$

c D_n comprend les applications $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \ldots, \rho^{n-1}\sigma$. Or ces applications sont distinctes deux à deux : en effet, les n rotations $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}$ n'ont pas le même effet sur A_1, donc sont distinctes deux à deux. Les éléments $\sigma, \rho\sigma, \ldots, \rho^{n-1}\sigma$ sont distincts deux à deux (sinon, en simplifiant par σ, deux rotations précédentes seraient égales). Enfin, les ensembles $\{\sigma, \rho\sigma, \ldots, \rho^{n-1}\sigma\}$ et $\{\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}\}$ sont disjoints (car une rotation conserve les angles orientés, pas une symétrie).

D_n est de cardinal au moins $2n$.

B.3 L'image du segment $[A_1A_2]$ par un élément f de D_n est un segment de même longueur, et inclus dans P_n : c'est donc un segment d'extrémités deux sommets consécutifs de P_n : $f(A_1)$ et $f(A_2)$ sont deux sommets consécutifs de P_n. On a donc (au plus) n possibilités pour le choix d'une image de A_1 par f. Une fois l'image de A_1 fixée, nous avons (au plus) deux possibilités pour l'image de A_2. Ces deux images données, l'élément de D_n est complètement déterminé (puisqu'on connaît les images des trois points non alignés O, A_1, A_2). D_n est donc de cardinal au plus $2n$.

B.4

a Une récurrence permet de montrer ce résultat. Montrons l'hérédité : si $ba^kb = a^{n-k}$, alors

$$ba^{k+1}b = ba^kab = ba^kbbab = a^{n-k}bab = a^{n-k}a^{-1}abab = a^{n-(k+1)}$$

b Bien sûr, pour tout $h \in G$, φ_h est une bijection de G dans G (*i.e.* une permutation de G) car admet pour réciproque l'application $(\varphi_h)^{-1} = \varphi_{h^{-1}}$.

c L'ensemble X est de cardinal au plus $2n$. L'application φ_a envoie clairement tout élément de X sur un élément de X, *i.e.* $\varphi_a(X) \subset X$. Cette application étant injective (et X étant fini), on a $\varphi_a(X) = X$.

L'application φ_b envoie tout élément de X sur un élément de X : en effet, $ba^kb = a^{n-k} \in X$, et $ba^k = ba^kbb = a^{n-k}b$, pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$. Comme φ_b est injective, on a $\varphi_b(X) = X$. La réciproque de φ_a (resp. φ_b) est $\varphi_{a^{-1}}$ (resp. $\varphi_{b^{-1}}$). On a donc $\varphi_{a^{-1}}(X) = X$ et $\varphi_{b^{-1}}(X) = X$. Ainsi, X est une partie de G comprenant e, et stable par produit (à gauche) par a, b, a^{-1}, b^{-1}. Comme G est engendré par a et b, on a $G = X$. G est donc d'ordre fini au plus $2n$.