Devoir non surveillé

Homéomorphismes

Les intervalles considérés sont d'intérieur non vide. On rappelle que les intervalles fermés (d'intérieur non vide) sont les intervalles du type $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ et $\mathbb{R}$, et que les intervalles ouverts (d'intérieur non vide) sont les intervalles du type $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ et $\mathbb{R}$ (pour certains réels a et b, $a < b$).

Soit X et Y deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Un *homéomorphisme* de X sur Y est une bijection continue de X sur Y, de réciproque continue. On dit que X est *homéomorphe* à Y s'il existe un homéomorphisme de X sur Y.

1 Montrer que « être homéomorphe à » est une relation réflexive, symétrique et transitive sur l'ensemble des parties non vides de $\mathbb{R}$.

2 Que dire d'une partie de $\mathbb{R}$ homéomorphe à un intervalle ?

3 Donner un exemple de bijection continue de X sur Y (parties non vides de $\mathbb{R}$), mais de bijection réciproque non continue.

4 Soit I et J deux intervalles. Montrer que si $f : I \to J$ est une bijection continue de I sur J, alors f est un homéomorphisme de I sur J.

5 Montrer que deux segments (non réduits à un point) de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes. Montrer que si une partie I de $\mathbb{R}$ est homéomorphe à un segment, alors I est un segment.

6

a Montrer que $]0, 1[$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes deux à deux.

b En déduire que deux intervalles ouverts (non vides) sont homéomorphes.

7 Soit a et b deux réels. Montrer que les intervalles $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$ sont homéomorphes.

8 Montrer qu'un intervalle fermé non borné n'est pas homéomorphe à un segment.

9 Montrer que $\mathbb{R}_+$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.