Corrigé de devoir non surveillé

Partie A – Préliminaires faciles

A.1 Cette équation est de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 5 = -16 = (4i)^2$, ses solutions sont donc $1 + 2i$ et $1 - 2i$.

A.2

a On suppose ici que $K \neq 1$. Exprimer en fonction de a, b, K un nombre complexe c et un réel strictement positif R tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z-a|^2 = K^2|z-b|^2 \Leftrightarrow |z-c|^2 = R^2.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} |z-a|^2 - K^2|z-b|^2 &= (1-K^2)|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}(a-K^2b)) + |a|^2 - K^2|b|^2 \\ &= (1-K^2)\left(|z|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\bar{z}\frac{a-K^2b}{1-K^2}\right) + \frac{|a|^2-K^2|b|^2}{1-K^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $c = \frac{a-K^2b}{1-K^2}$ et $\lambda = \left|\frac{a-K^2b}{1-K^2}\right|^2 - \frac{|a|^2-K^2|b|^2}{1-K^2}$, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z-a|^2 = K^2|z-b|^2 \Leftrightarrow |z-c|^2 = \lambda.$$

Reste à vérifier que λ est strictement positif :

$$\lambda = \frac{1}{(1-K^2)^2}\left(|a-K^2b|^2 - (1-K^2)(|a|^2-K^2|b|^2)\right) = \frac{K^2(|a|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}b) + |b|^2}{(1-K^2)^2} = \frac{K^2|a-b|^2}{(1-K^2)^2}.$$

En posant $R = \frac{K|a-b|}{1-K^2}$, on a bien prouvé le résultat annoncé.

b Si $K > 1$, la question précédente assure que cet ensemble est un cercle de centre (d'affixe) c, et de rayon R. Il en va de même si $K < 1$ en échangeant les rôles de a et b (passant de K à son inverse). Enfin, si $K = 1$, il s'agit de la médiatrice sur segment $[AB]$.

A.3 Les arguments de $\frac{a-c}{a-d}$ sont les mesures d'angle de $(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CA}})$, de même pour $\frac{b-c}{b-d}$ et $(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CB}})$: le rapport entre ces deux complexes non nuls est réel si et seulement si ils ont les mêmes arguments modulo π, soit encore

$$(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CB}})\ [\pi],$$

soit enfin A, B, C, D sont cocycliques ou alignés.

A.4

a Soit (a, b, c, d) des nombres complexes distincts deux à deux. Leurs images par f sont également distinctes deux à deux (car f est injective, et même bijective, puisque $\alpha \neq 0$), et :

$$\mathcal{B}(f(a), f(b), f(c), f(d)) = \frac{f(a)-f(c)}{f(a)-f(d)}\frac{f(b)-f(d)}{f(b)-f(c)} = \frac{\alpha(a-c)}{\alpha(a-d)}\frac{\alpha(b-d)}{\alpha(b-c)} = \mathcal{B}(a, b, c, d).$$

f conserve donc bien le birapport.

b L'application inverse est bijective car involutive, et, pour tous complexes non nuls a, b, c, d distincts deux à deux :

$$\mathcal{B}(1/a, 1/b, 1/c, 1/d) = \frac{1/a-1/c}{1/a-1/d}\frac{1/b-1/d}{1/b-1/c} = \frac{\frac{c-a}{ac}}{\frac{d-a}{ad}}\frac{\frac{d-b}{bd}}{\frac{c-b}{bc}} = \mathcal{B}(a, b, c, d),$$

donc l'application inverse $z \mapsto 1/z$ conserve bien le birapport.

c Soit a, b, c, d des nombres complexes distincts tels que leurs images par $f \circ g$ soient également distinctes (en particulier, leurs images par g sont également distinctes). On a :

$$\mathcal{B}(f\circ g(a), f\circ g(b), f\circ g(c), f\circ g(d)) = \mathcal{B}(f(g(a)), f(g(b)), f(g(c)), f(g(d))) = \mathcal{B}(g(a), g(b), g(c), g(d)) = \mathcal{B}(a, b, c, d),$$

donc $f \circ g$ conserve le birapport.

A.5 Pour tout point z du cercle de centre c de rayon R, on a :

$$|z| = |z - c + c| \leqslant |z - c| + |c| = R + |c|,$$

donc ce cercle est borné (le choix $M = R + |c|$ convient).

Partie B – Homographies et birapport

B.1 Le domaine de définition de f est $\mathbb{C}$ si $c = 0$, $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ sinon.

B.2 Le cas où $c = 0$ a déjà été traité. Supposons $c \neq 0$. Observons, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$, que :

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}.$$

Or $z \mapsto cz + d$, $z \mapsto 1/z$ et $z \mapsto \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right) z$ conservent le birapport, donc leur composée f également.

B.3 Bien sûr, il n'y a rien à prouver si $z = z'$, supposons donc $z \neq z'$, de sorte que z, z', u_1, u_2 soient bien distincts deux à deux. Comme f est injective, leurs images $f(z), f(z'), f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$ sont également distinctes deux à deux. Puisque f conserve le birapport, on a

$$\mathcal{B}(f(z), f(z'), u_1, u_2) = \mathcal{B}(z, z', u_1, u_2),$$

ce qui, par un calcul simple, conduit à

$$\mathcal{B}(f(z), z, u_1, u_2) = \mathcal{B}(f(z'), z', u_1, u_2).$$

B.4 On écarte le cas évident où $f = \mathrm{Id}$.

Fixons $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{u_1, u_2\}$ pour lequel $\mathcal{B}(f(z_0), z_0, u_1, u_2)$ soit bien défini (un tel z_0 existe car sinon, par injectivité de f, $f(z_0) = z_0$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, puis $f = \mathrm{Id}$). Pour qu'un tel k existe, il faut que $k = \mathcal{B}(f(z_0), z_0, u_1, u_2)$, ce qui montre l'unicité (et donne la valeur nécessaire de k).

Réciproquement, posons $k = \mathcal{B}(f(z_0), z_0, u_1, u_2)$. On a bien alors, d'après la question précédente, pour tout z tel que z, $f(z)$, u_1 et u_2 soient (bien définis et) distincts deux à deux :

$$\frac{f(z) - u_1}{f(z) - u_2} = k \frac{z - u_1}{z - u_2}.$$

B.5 On montre aisément ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: l'amorçage au rang 0 est clair, et, supposant la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\frac{f^{\circ(n+1)}(z) - u_1}{f^{\circ(n+1)}(z) - u_2} = k \frac{f^{\circ n}(z) - u_1}{f^{\circ n}(z) - u_2} = k^{n+1} \frac{z - u_1}{z - u_2},$$

d'où l'hérédité, puis le résultat.

Partie C – Homographies à deux points fixes vérifiant la propriété $\mathcal{C}$.

C.1

a Posons $K = \left|\frac{z-u_1}{z-u_2}\right|$.D'après la qestion B.5, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f^{\circ n}(z) - u_1| = K |f^{\circ n}(z) - u_2|.$$

D'après A.2.b, tous les $f^{\circ n}(z)$ appartiennent à un même cercle ou une même droite (d'équation $|z' - u_1| = K|z' - u_2|$).

f vérifie donc bien la propriété $\mathcal{C}$.

b Notons Δ le cercle ou la droite passant par (les points d'affixe) u_1, u_2 et z. D'après la question B.5, et puisque k est réel, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}(f^{\circ n}(z), z, u_1, u_2)$ est réel. D'après la question A.3, on en déduit que $f^{\circ n}(z)$ appartient à Δ pour tout $n \in \mathbb{N}$: f vérifie la propriété $\mathcal{C}$.

C.2

a Soit z un nombre complexe pour lequel $g(f(z))$ et $m_k(g(z))$ sont bien définis. On a, essentiellement grâce à B.4 :

$$g(f(z)) = \frac{f(z) - u_1}{f(z) - u_2} = k \frac{z - u_1}{z - u_2} = k g(z) = m_k(g(z)),$$

ce qui montre le résultat souhaité.

On peut d'ailleurs généraliser ce résultat en observant que $g(f^{\circ n}(z)) = k^n g(z) = m_k^{\circ n}(g(z))$.

b Observons déjà que, f étant injective, le seul antécédent d'un point fixe z de f est z lui-même, ce qui prouve que $f(z_0'), f^{\circ 2}(z_0')$ et $f^{\circ 3}(z_0')$ sont distincts de u_1 et de u_2.

En outre, on a : $\left|\frac{f^{\circ n}(z_0')-u_1}{f^{\circ n}(z_0')-u_2}\right| = |k|^n \left|\frac{z_0'-u_1}{z_0'-u_2}\right|$, pour tout $n \in [\![0,3]\!]$. Or $|k| \neq 1$ (et $\left|\frac{z_0'-u_1}{z_0'-u_2}\right| \neq 0$), donc $z_0', f(z_0'), f^{\circ 2}(z_0')$ et $f^{\circ 3}(z_0')$ sont nécessairement distincts deux à deux.

c Les birapports considérés sont bien définis d'après la question précédente et l'injectivité de g. De plus :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(z_0, m_k(z_0), m_k^{\circ 2}(z_0), m_k^{\circ 3}(z_0)) &= \mathcal{B}(g(z_0'), m_k(g(z_0')), m_k^{\circ 2}(g(z_0')), m_k^{\circ 3}(g(z_0')))\\ &= \mathcal{B}(g(z_0'), g(f(z_0')), g(f^{\circ 2}(z_0')), g(f^{\circ 3}(z_0'))\\ &= \mathcal{B}(z_0', f(z_0'), f^{\circ 2}(z_0'), f^{\circ 3}(z_0')).\end{aligned}$$

d Puisque z_0', $f(z_0')$, $f^{\circ 2}(z_0')$ et $f^{\circ 3}(z_0')$ sont cocycliques ou alignés, leur birapport est réel. D'après la question précédente, on en déduit que $z_0, m_k(z_0), m_k^{\circ 2}(z_0), m_k^{\circ 3}(z_0)$ sont cocycliques ou alignés. Par une récurrence immédiate (dont l'hérédité provient du fait que m_k conserve le birapport), on en déduit que tous les points de $(z_0 k^n)$ sont cocycliques ou alignés. De plus, quitte à échanger les rôles de u_1 et u_2, on peut supposer $|k| > 1$.

Or, si ces points étaient cocycliques, la suite $(z_0 k^n)$ serait bornée, ce qui n'est pas le cas ($z_0 \neq 0$ car $z_0' \neq u_1$ et g est injective), donc ces points sont alignés, en particulier les trois premiers, puis $k = \frac{k^2 z_0 - k z_0}{k z_0 - z_0}$ est réél.

C.3

a On vérifie aisément que les points fixes de f_0 sont les solutions de l'équation donnée en A.1, soit $1-2i$ et $1+2i$.

En outre, f_1 étant une homographie distincte de l'identité, elle admet au plus deux points fixes (la recherche de points fixes conduit à résoudre une équation du second degré). Par simple calcul, on vérifie que $1-2i$ et $1+2i$ sont bien fixés par f_1.

b Ces homographies admettant deux points fixes, montrer qu'elles vérifient la propriété $\mathcal{C}$ revient à vérifier que leur rapport est réel ou de module 1. Pour déterminer ces rapports, on choisit $z=0$ pour f_0 ($f_0(0)=1$) et $z=1$ pour f_1 ($f_1(1) = 1 - \frac{2}{3}i$) : f_0 admet pour rapport $\frac{3+4i}{5}$, de module 1, et f_1 admet un rapport réel : ces homographies vérifient la propriété $\mathcal{C}$.