Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Hyperbolisme

Partie A – Hyperbole équilatère et loi ∇

A.1 cf le fichier Maple.

A.2 Soit t un réel non nul, et M le point de $\mathcal{H}$ paramètre t.

a L'affixe de M est $\mathrm{ch}(t) + i\ \mathrm{sh}(t)$. L'affixe du symétrique (orthogonal) M' de M par rapport à l'axe des abscisses est le conjugué de $\mathrm{ch}(t) + i\ \mathrm{sh}(t)$, soit $\mathrm{ch}(t) - i\ \mathrm{sh}(t)$.

b Le cercle de diamètre $[MM']$ est le cercle de centre d'affixe $\mathrm{ch}(t)$ et de rayon $|sh(t)|$. Son intersection avec l'axe des abscisses est donc constituée des points d'affixes $\mathrm{ch}(t)+\mathrm{sh}(t) = e^t$ et $\mathrm{ch}(t)-\mathrm{sh}(t) = e^{-t}$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{JM}$ est $\mathrm{ch}(t) + i\ \mathrm{sh}(t) - e^t = -\frac{e^t-e^{-t}}{2} + i\ \mathrm{sh}(t) = \mathrm{sh}(t)(-1+i)$. Il s'agit bien d'un nombre non nul puisque $t \neq 0$. Un argument de (-1+i) étant $\frac{3\pi}{4}$, un argument de l'affixe de $\overrightarrow{JM}$ est :

1. $\frac{3\pi}{4}$ si $t > 0$;
2. $-\frac{\pi}{4}$ si $t < 0$.

A.3 Soit t un réel, et M le point de $\mathcal{H}$ paramètre t, *i.e.* le point d'affixe $\mathrm{ch}(t)+i\ \mathrm{sh}(t)$. Le point à l'intersection de la droite (OM) et de la droite d'équation $x = 1$ est donc le point dont l'affixe est un multiple réel de $\mathrm{ch}(t) + i\ \mathrm{sh}(t)$ et de partie réelle 1 : c'est donc le point d'affixe $\frac{1}{\mathrm{ch}(t)}(\mathrm{ch}(t) + i\ \mathrm{sh}(t)) = 1 + i\ \mathrm{th}(t)$.

A.4

a L'intersection de $\mathcal{D}$ avec la droite d'équation $y = 1$ est le point dont l'affixe est un multiple réel de $e^t + i\,e^{-t'}$ et de partie imaginaire 1 : c'est donc le point d'affixe $e^{t'}(e^t + i\,e^{-t'}) = e^{t+t'} + i$.

b K étant supposé construit, son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses est le point d'affixe $e^{t+t'}$. Le point de $\mathcal{H}$ de paramètre $t + t'$ s'obtient alors par exemple comme intersection de $\mathcal{H}$ avec la droite passant par les points d'affixes $e^{t+t'}$ et $i\,e^{t+t'}$.

A.5 cf le fichier Maple.

Partie B – Construction géométrique de $\mathcal{H}$

B.1

a $\sin(\theta) - \cos(\theta) = 0$ si et seulement si $\tan(\theta) = 1$ (car si θ est de cosinus nul, alors $\sin(\theta) - \cos(\theta) \neq 0$) si et seulement si $\theta \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$.

b $\sin(\theta) + \cos(\theta) = 0$ si et seulement si $\theta \in -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$.

B.2

a La question précédente justifie la non nullité des dénominateurs ci-dessous. Soit $\mathcal{A}_1$ (resp. $\mathcal{A}_2$) l'asymptote de $\mathcal{H}'$ d'équation $y = x$ (resp. $y = -x$).

Soit θ un réel non congru à 0 modulo $\frac{\pi}{4}$.

$$(M(z) \in \Delta \cap \mathcal{A}_1) \Leftrightarrow \left(\exists\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} z = 1 + \lambda e^{i\theta} \\ \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\left(z = 1 + \lambda e^{i\theta}\right) \wedge \left(\lambda = \frac{1}{\sin(\theta) - \cos(\theta)}\right)\right)$$

$$(M(z) \in \Delta \cap \mathcal{A}_2) \Leftrightarrow \left(\exists\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} z = 1 + \lambda e^{i\theta} \\ \mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z) \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\left(z = 1 + \lambda e^{i\theta}\right) \wedge \left(\lambda = -\frac{1}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}\right)\right)$$

H_1 (resp. H_2) est donc d'affixe $1 + \frac{1}{\sin(\theta)-\cos(\theta)}e^{i\theta}$ (resp. $1 - \frac{1}{\sin(\theta)+\cos(\theta)}e^{i\theta}$). Le milieu I du segment $[H_1H_2]$ est donc d'affixe :

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sin(\theta) - \cos(\theta)}e^{i\theta} + 1 - \frac{1}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}e^{i\theta}\right) = 1 + \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)}e^{i\theta}$$

b

$$(M(z)\in\mathcal{H}'\cap\Delta)\Leftrightarrow\left(\exists\lambda\in\mathbb{R},\left\{\begin{array}{c} z=1+\lambda e^{i\theta}\\ \mathrm{Re}^2(z)-\mathrm{Im}^2(z)=1\end{array}\right.\right)\Leftrightarrow\left(\left\{\begin{array}{c} z=1+\lambda e^{i\theta}\\ (1+\lambda\cos(\theta))^2-(\lambda\sin(\theta))^2=1\end{array}\right.\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\lambda\left(2\cos(\theta)+\lambda(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))\right)=0\right)\wedge\left(z=1+\lambda e^{i\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left((\lambda=0)\vee\left(\lambda=-\frac{2\cos(\theta)}{\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)}\right)\right)\wedge\left(z=1+\lambda e^{i\theta}\right)$$

M est donc le point d'affixe

$$1-\frac{2\cos(\theta)}{\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)}e^{i\theta},$$

et le milieu de $[PM]$ est donc d'affixe :

$$\frac{1}{2}\left(1+1-\frac{2\cos(\theta)}{\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)}e^{i\theta}\right)=1-\frac{\cos(\theta)}{\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)}e^{i\theta}$$

On reconnaît bien l'affixe de I : le milieu de $[PM]$ est I.

c Si on trace une droite Δ passant par P, non verticale, et de pente différente de 1, de 0 et de -1, on croise les asymptotes de $\mathcal{H}'$ en deux points H_1 et H_2, ce qui permet de construire le milieu I de $[H_1H_2]$. Le symétrique de P par rapport à I est un nouveau point de $\mathcal{H}'$.

Il suffit de réitérer cette construction n fois (en prenant des droites différentes deux à deux !) pour construire n points de $\mathcal{H}'$ (outre le point P).