Corrigé de devoir non surveillé

Hyperplans stables par multiplication

Partie A – Préliminaires

A.1 Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si A et B sont équivalentes, il existe $(Q, P) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $B = Q^{-1}AP$, donc $(U, V) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $B = UAV$, en posant $V = P$ et $U = Q^{-1}$. Si, réciproquement, il existe de telles matrices U et V, alors en posant $Q = U^{-1}$ et $V = P$, on constate que A et B sont équivalentes.

A.2

a Choisissons $N = n^2$: $\left(A^k\right)_{k\in[\![0,N]\!]}$ est une famille de $n^2 + 1$ vecteurs de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension n^2 : elle est donc liée.

b D'après la question précédente, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, et des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_N$ non tous nuls tels que

$$(\mathcal{E}) \quad \sum_{k=0}^{N} \lambda_k A^k = 0_n.$$

Posons $m = \min\{k \in [\![0, N]\!], \lambda_k \neq 0\}$ (plus petit élément d'une partie non vide de $\mathbb{N}$). En multipliant par $\frac{1}{\lambda_m} A^{-m}$ la relation $\mathcal{E}$, on écrit I_n comme combinaison linéaire de $\left(A^k\right)_{k\in[\![1,N-m]\!]}$: en particulier, $I_n \in \mathrm{Vect}(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

A.3 $T_n(\mathbb{K})$ comprend I_n, est stable par produit et par combinaison linéaire : ces propriétés montrent que $T_n(\mathbb{K})$ est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie B – Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

B.1 La multiplication par A définit un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et la trace définit une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Obtenue comme composée licite de ces applications, φ_A est bien une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

B.2 Cette application est bien définie d'après la question précédente. Elle est linéaire pour les mêmes raisons que l'est φ_A. Si on tient malgré tout à détailler la linéarité, voici ce que l'on pourrait écrire :

soit $(A, A', M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$, $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda A + \lambda' A')(M) &= \mathrm{tr}((\lambda A + \lambda' A')M) \quad \text{(par définition de } \Phi\text{)} \\
&= \mathrm{tr}(\lambda(AM) + \lambda'(A'M)) \quad \text{(par bilinéarité du produit matriciel)} \\
&= \lambda\, \mathrm{tr}(AM) + \lambda'\, \mathrm{tr}(A'M) \quad \text{(par linéarité de la trace)} \\
&= (\lambda\Phi(A) + \lambda'\Phi(A'))(M).
\end{aligned}$$

Ceci valant pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\Phi(\lambda A + \lambda' A') = \lambda\Phi(A) + \lambda'\Phi(A')$. Ceci valant pour toutes matrices A et A' de taille n, tous scalaires λ et λ', Φ est bien linéaire.

De plus, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et$\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ ont même dimension finie (n^2) : pour montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, il suffit de montrer son injectivité.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Notons $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Puisque $A \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, on a $\mathrm{tr}(AE_{i,j}) = 0$, soit encore $a_{j,i} = 0$, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$: $A = 0_n$.

Φ est bien un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

B.3

a En tant qu'hyperplan, $\mathcal{H}$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: d'après la question précédente (et plus précisément la surjectivité de Φ), il existe bien $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\varphi_A)$. Il n'y a pas unicité d'une telle matrice, puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\varphi_{\lambda A})$ (et A est non nulle).

b $B_0 = 0_n$ est de rang nul, pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$, $B_r = \sum_{k=1}^{r} E_{i,i+1}$ est de rang r, et $B_n = E_{n,1} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$ est de rang n. De plus, toutes ces matrices sont de diagonale nulle.

c La matrice A est équivalente à une matrice B_r de diagonale nulle (où $r = \mathrm{rg}(A)$) : soit $(U, V) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $B_r = UAV$. On a $\mathrm{tr}(B_r) = 0$, donc $\mathrm{tr}(AVU) = \mathrm{tr}(UAV) = 0$: la matrice inversible VU appartient à $\mathcal{H}$.

Partie C – Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par multiplication

C.1 $\mathcal{H}$ comprend une matrice inversible C : par stabilité par produit, $\mathcal{H}$ contient $\{C^k, k \in \mathbb{N}^*\}$. D'après A.2.b, et par stabilité de $\mathcal{H}$ par combinaison linéaire, $I_n \in \mathcal{H}$.

C.2 Soit $B \in \mathcal{H}$.

Considérons $\Omega = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{tr}(AMB) = 0\}$. Pour tout $M \in \mathcal{H}$, $MB \in \mathcal{H}$, de sorte que $\mathrm{tr}(AMB) = 0$, puis $\mathcal{H} \subset \Omega$. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{H}$: on a $\mathcal{H} \oplus \mathbb{K}C = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit λ le scalaire tel que $\mathrm{tr}(CBA) = \lambda\,\mathrm{tr}(CA)$ ($\mathrm{tr}(CA) \neq 0$). La forme linéaire $M \mapsto \mathrm{tr}(AMB) - \lambda\,\mathrm{tr}(MA)$ est nulle sur $\mathcal{H}$ et en C, donc identiquement nulle. Par injectivité de Φ, on en déduit $BA = \lambda A$: BA est colinéaire à A.

C.3 f est non nul, car A est non nulle (sinon $\mathcal{H}$ serait égal à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et non un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

C.4

a On a par formule de changement de base $B' = P^{-1}BP$.

b Soit $z_1 \in \mathbb{K}^n$ tel que $x_1 = f(z_1)$. Notons X_1 (resp. Z_1) la matrice colonne des composantes de x_1 (resp. de z_1) dans $\mathcal{B}$, de sorte que $AZ_1 = X_1$. On sait d'après C.2 que $BA = \lambda A$ pour un certain scalaire λ, et on a donc $BAZ_1 = \lambda AZ_1$, *i.e.* $BX_1 = \lambda X_1$. En termes d'endomorphismes, cela s'écrit $g(x_1) = \lambda x_1$, ce qui montre que tous les termes de la première colonne, sauf éventuellement le premier, sont nuls.

c On peut montrer ce résultat classique à la main (preuve laissée au lecteur, ne pas oublier de vérifier qu'on envoie I_n sur elle-même), ou en interprétant Q comme une matrice de changement de base, en se rappelant que pour toute base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, l'application $\Delta_{\mathcal{B}}\ : f \mapsto M_{\mathcal{B}}(f)$ définit un isomorphisme d'anneaux et d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\mathcal{B}'$ est la base de E telle que $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = Q$, alors $c = \Delta_{\mathcal{B}'} \circ \Delta_{\mathcal{B}}^{-1}$, et c est donc un automorphisme de l'espace vectoriel et de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

d L'application $M \mapsto P^{-1}MP$ étant un isomorphisme d'espaces vectoriels, elle conserve la dimension : $\mathcal{H}$ est donc isomorphe à un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension au plus $n^2 - n + 1$ (d'après C.4.b notamment), ce qui impose $n = 2$. De plus, $M \mapsto P^{-1}MP$ envoie $\mathcal{H}$ sur un sous-espace vectoriel de $T_2(\mathbb{K})$ (toujours d'après C.4.b), de dimension trois, donc sur $T_2(\mathbb{K})$.

Ceci prouve bien que $n = 2$, et que $\mathcal{H}$ est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel et anneau, à $T_2(\mathbb{K})$.

Partie D – Quelques résultats sur les sous-algèbres

D.1

a Il est clair que $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}}$, que $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ est stable par combinaison linéaire et par composition, ce qui fait de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

De plus, en notant m la dimension de $\mathcal{V}$, et $\mathcal{W}$ un supplémentaire de $\mathcal{V}$ dans E, on obtient un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \times \mathcal{L}(\mathcal{W}, E)$, par

$$\begin{array}{rccl} \nabla\ : & \mathcal{A}_{\mathcal{V}} & \to & \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \times \mathcal{L}(\mathcal{W}, E) \\ & f & \mapsto & (f_{|\mathcal{V}}, f_{|\mathcal{W}}) \end{array}.$$

La dimension de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ est donc $m^2 + n(n-m)$.

b La réciproque est fausse comme on le constate en considérant la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe par choix d'une base à l'algèbre des matrices diagonales de taille n (si $m^2 + n(n-m) = n$, alors $(n-m)^2 = n(1-m)$, ce qui contredit $n \geqslant 2$).

D.2 On sait d'après C.4.d qu'il nous faut exclure la dimension 8. On peut également exclure la dimension nulle, puisque toute sous-algèbre (au sens qu'on lui a donné) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ contient $\mathbb{K}I_3$. Montrons que l'on peut obtenir toutes les autres dimensions entre 1 et 9. Pour alléger les notations, nous donnerons la forme générique des matrices des sous-algèbres introduites :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & \nu & \xi \end{pmatrix}.$$

Enfin, la dimension 9 est obtenue pour $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.