Corrigé de devoir non surveillé

Idéaux de $\mathcal{L}(E)$

Partie A – Généralités et préliminaires

A.1

a Soit $y \in \mathrm{Im}(f+g)$: il existe un vecteur x de E tel que $y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$, et donc $y \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Ceci étant valable pour tout $y \in \mathrm{Im}(f+g)$, on a bien $\boxed{\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)}$. Cette inclusion est stricte par exemple si $\boxed{f = -g = \mathrm{Id}_E.}$

b Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$: on a $f(x) = g(x) = 0_E$, et par conséquent $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0_E$, puis $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$.

Ceci étant valable pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$, on a bien $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)}$. Cette inclusion est stricte par exemple si $\boxed{f = -g = \mathrm{Id}_E.}$

A.2

a $\mathcal{I}$ est une partie non vide stable par somme de $\mathcal{L}(E)$, puisque c'en est un sous-groupe. Soit λ un scalaire, et $f \in \mathcal{I}$. Comme $\mathcal{I}$ est un idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$, on a $\lambda f = (\lambda \mathrm{Id}_E) \circ f \in \mathcal{I}$. Ceci montre la stabilité de $\mathcal{I}$ par la multiplication scalaire.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{I} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E).}$

b Si $f \circ g \in \mathcal{I}$ et $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors $g = f^{-1} \circ (f \circ g) \in \mathcal{I}$.

c Si g est un élément commun à $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathcal{I}$, alors, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $f = (f \circ g^{-1}) \circ g \in \mathcal{I}$, et donc $\boxed{\mathcal{I} = \mathcal{L}(E)}$ (l'autre inclusion étant connue).

d $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ est un sous-groupe de $\mathcal{L}(E)$ (c'en est même un sous-espace vectoriel). Si u et v sont des éléments respectifs de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$, et f un endomorphisme de E, alors $f \circ (u+v) = f \circ u + f \circ v \in \mathcal{I} + \mathcal{J}$, puisque $f \circ u \in \mathcal{I}$ et $f \circ v \in \mathcal{J}$. Par conséquent, $\boxed{\mathcal{I} + \mathcal{J} \text{ est un idéal à gauche de } \mathcal{L}(E).}$

e En tant qu'intersection de sous-groupes de $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ est un sous-groupe de $\mathcal{L}(E)$. De plus, si $u \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \circ u$ appartient à $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$) puisque $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$) est un idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$, donc $f \circ u \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$. Par conséquent $\boxed{\mathcal{I} \cap \mathcal{J} \text{ est un idéal à gauche de } \mathcal{L}(E).}$

A.3 Le seul vecteur de $\mathcal{B}$ d'image éventuellement non nulle par $\varphi_{i,j} \circ \varphi_{k,l}$ est e_l. Cette image est $\varphi_{i,j}(e_k)$, est nulle si $j \neq k$, et vaut e_i si $j = k$, donc vaut $\delta_{j,k}\varphi_{i,l}(e_l)$. Les applications linéaires $\varphi_{i,j} \circ \varphi_{k,l}$ et $\delta_{j,k}\varphi_{i,l}$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$, et sont donc égales : $\boxed{\varphi_{i,j} \circ \varphi_{k,l} = \delta_{j,k}\varphi_{i,l}.}$

A.4 On sait déjà que F et $\mathrm{Im}(f)$ sont isomorphes. Le résultat annoncé est évident si $\mathrm{Im}(f)$ est trivial. On se place donc dans le cas contraire : soit $(h_1, \ldots, h_k)$ et $(g_{k+1}, \ldots, g_n)$ des bases respectives de F et de $\mathrm{Ker}(f)$. Soit également $(l_{k+1}, \ldots, l_n)$ une base d'un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$. On considère le morphisme v de $\mathcal{L}(E)$ envoyant h_i sur $f(h_i)$ ($i \in [\![1, k]\!]$) et g_j sur l_j ($j \in [\![k+1, n]\!]$).

Les endomorphismes f et v coïncident sur F (par construction de v). Comme $F \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, la famille $(f(h_1), \ldots, f(h_k))$ est libre, donc est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Il s'ensuit que $(f(h_1), \ldots, f(h_k), l_{k+1}, \ldots, l_n)$ est une base de E : v envoie une base sur une base, donc est un automorphisme de E.

v est surjective et $\mathrm{Ker}(f) + F = E$, donc $v(\mathrm{Ker}(f)) + v(F) = E$, ainsi $v(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{Im}(f) = E$. Comme $\dim(v(\mathrm{Ker}(f))) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$ (v est un automorphisme), le théorème du rang montre que

$$v(\mathrm{Ker}(f)) \oplus \mathrm{Im}(f) = E.$$

En prenant $u = v$, et pour p le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $v(\mathrm{Ker}(f))$, on constate que $\boxed{f = p \circ u}$. On a en effet, pour tout $(x_K, x_F) \in \mathrm{Ker}(f) \times F$, $p \circ u(x_K + x_F) = p(u(x_K) + u(x_F)) = p(v(x_K) + f(x_F)) = f(x_F) = f(x_F + x_K)$.

Partie B – Idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$

B.1 $\boxed{\mathcal{L}(E) \text{ et } \{0_{\mathcal{L}(E)}\}}$ sont deux idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$.

B.2 Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{i,i_0} \circ \varphi_{i_0,j_0} \circ \varphi_{j_0,j}.$$

L'idéal $\mathcal{I}$ étant bilatère, $\varphi_{i,j} \in \mathcal{I}$.

Il s'ensuit que si $\mathcal{I}$ comprend φ_{i_0,j_0} pour certains entiers $i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$, alors il contient

$$\{\varphi_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

B.3 On suppose ici $\mathcal{I}$ distinct de $\{0_{\mathcal{L}(E)}\}$. Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\varphi_{i,j} \in \mathcal{I}$. En déduire que $\mathcal{I} = \mathcal{L}(E)$.

Soit u un élément non nul de $\mathcal{I}$. Il existe des scalaires $\lambda_{i,j}$, non tous nuls, tels que

$$u = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_{i,j} \varphi_{i,j}.$$

Supposons par exemple λ_{i_0,j_0} non nul. Remarquons que

$$\varphi_{i_0,i_0} \circ u \circ \varphi_{j_0,j_0} = \lambda_{i_0,j_0} \varphi_{i_0,j_0}.$$

L'idéal $\mathcal{I}$ étant bilatère, $\lambda_{i_0,j_0} \varphi_{i_0,j_0}$ appartient à $\mathcal{I}$. Ce dernier étant également un espace vectoriel, $\varphi_{i_0,j_0} = \frac{1}{\lambda_{i_0,j_0}} \lambda_{i_0,j_0} \varphi_{i_0,j_0}$ appartient à $\mathcal{I}$. La question précédente montre alors que $\mathcal{I}$ contient une partie génératrice de $\mathcal{L}(E)$. Comme $\mathcal{I}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ on a $\boxed{\mathcal{I} = \mathcal{L}(E).}$

B.4 L'ensemble des idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$ est $\boxed{\{\{0_{\mathcal{L}(E)}\}, \mathcal{L}(E)\}}$.

Partie C – Idéaux à droite de $\mathcal{L}(E)$

C.1

a Bien sûr, $\mathcal{D}_F$ n'est pas vide, et pour tous $f, g \in \mathcal{D}_F$. $\mathrm{Im}(f - g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(-g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) \subset F$, donc $f + g \in \mathcal{D}_F$.

Soit $f \in \mathcal{D}_F$, et $g \in \mathcal{L}(E)$. On a $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f) \subset F$.

$\boxed{\mathcal{D}_F \text{ est donc un idéal à droite de } \mathcal{L}(E).}$

b L'application

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & \mathcal{D}_F & \rightarrow & \mathcal{L}(E, F) \\ & g & \mapsto & g^{|F} \end{array}$$

est un isomorphisme entre $\mathcal{D}_F$ et $\mathcal{L}(E, F)$, et par conséquent la dimension de $\mathcal{D}_F$ est celle de $\mathcal{L}(E, F)$ donc $\boxed{n \dim(F)}$.

C.2

a Bien sûr, D_α n'est pas vide (il comprend α par exemple).

Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors $\alpha \circ f - \alpha \circ g = \alpha \circ (f - g) \in D_\alpha$ et $(\alpha \circ f) \circ g = \alpha \circ (f \circ g) \in D_\alpha$.

$\boxed{D_\alpha \text{ est un idéal à droite de } \mathcal{L}(E).}$

b Un élément quelconque de D_α s'écrit $\alpha \circ g$, pour un certain $g \in \mathcal{L}(E)$. Comme $g(E) \subset E$, on a $\alpha(g(E)) \subset \alpha(E) = \mathrm{Im}(\alpha)$. Il vient donc bien $\boxed{D_\alpha \subset \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(\alpha)}}$.

c $g \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(\alpha)$, donc la dimension du noyau de Δ est $\boxed{n \dim(\mathrm{Ker}(\alpha))}$ (voir C.1.b).

d Le théorème du rang (appliqué à Δ et à α) assure que $\mathrm{rg}(\Delta) = n^2 - n \dim(\mathrm{Ker}(\alpha)) = n(n - \dim(\mathrm{Ker}(\alpha))) = n\,\mathrm{rg}(\alpha) = \dim(\mathcal{D}_{\mathrm{Im}(\alpha)})$, et donc que Δ est un morphisme surjectif d'espaces vectoriels, puis que $\boxed{D_\alpha = \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(\alpha)}.}$

C.3

a L'ensemble $\{\mathrm{rg}(f), \quad f \in \mathcal{I}\}$, une partie non vide de $\mathbb{N}$ et majorée par n, admet un plus grand élément, qui s'écrit $\mathrm{rg}(\alpha)$ pour un certain élément α de $\mathcal{I}$.

$\boxed{\text{Il existe donc } \alpha \in \mathcal{I} \text{ tel que, pour tout } f \in \mathcal{I},\ \mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(\alpha).}$

On peut écrire $\alpha = p \circ u$, pour un certain projecteur p de E, et un automorphisme u de E. Comme $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(p \circ u) = p(u(E)) = p(E) = \mathrm{Im}(p)$, on a $\boxed{D_\alpha = D_p (= \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(\alpha)} = \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(p)}).}$

b Dire que $g \notin D_p$ signifie que $\mathrm{Im}(g)$ n'est pas incluse dans $\mathrm{Im}(p)$, puisque $D_p = \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(g)}$:

$\boxed{\text{il existe } y \in \mathrm{Im}(g) \text{ n'appartenant pas à } \mathrm{Im}(p).}$

c Clairement, $H + \mathrm{Im}(p) + \mathbb{R}y = E$. Par ailleurs, si $h \in H$, $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifient $h + p(x) = \lambda y$, alors $h = \lambda y - p(x) \in H \cap (\mathrm{Im}(p) + \mathbb{R}y) = \{0_E\}$, donc $h = 0_E$. Comme $y \notin \mathrm{Im}(p)$, $p(x) = 0_E$ et $\lambda = 0$: $H + \mathrm{Im}(p) \cap \mathbb{R}y = \{0_E\}$.

$\boxed{H + \mathrm{Im}(p) \text{ est un supplémentaire de } \mathbb{R}y \text{ dans } E.}$

d On a $y = g(x)$ pour un certain $x \in E$. Soit h l'application envoyant y sur x et tout vecteur de $H+\mathrm{Im}(p)$ sur le vecteur nul. $g \circ h \in \mathcal{I}$ envoie y sur lui-même, et tout élément de $H + \mathrm{Im}(p)$ sur le vecteur nul : c'est la projection sur $\mathbb{R}y$ parallèlement à $H + \mathrm{Im}(p)$.

$\boxed{\text{La projection } q \text{ sur } \mathbb{R}y \text{ parallèlement à } H + \mathrm{Im}(p) \text{ est un élément de } \mathcal{I}.}$

e On a vu l'inclusion $\mathrm{Im}(p + q) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)(= \mathrm{Im}(p) + \mathbb{K}y)$. Si x est un vecteur quelconque de $\mathrm{Im}(p)$, on a $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = x + 0_E = x$, d'où l'inclusion $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(p + q)$. Si x est un vecteur quelconque de $\mathrm{Im}(q)$, on a $(p+q)(x-p(x)) = p(x)+q(x)-p\circ p(x)-q\circ p(x) = p(x)+x-p(x)-0_E = x$, donc $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p + q)$. On a donc $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p + q)$, et finalement : $\boxed{\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) + \mathbb{K}y.}$

f On avait choisi α de rang maximal, or $p + q$ est de rang supérieur (on rappelle que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{rg}(\alpha)$), ce qui est absurde. Notre hypothèse de départ est fausse : $\boxed{D_p = \mathcal{I}.}$

C.4 La dimension d'un idéal à droite de $\mathcal{L}(E)$ est un multiple de n (voir C.1.b et la question précédente), ce qui n'est pas le cas de la dimension d'un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ (car $n \geqslant 2$) :

$\boxed{\text{aucun hyperplan de } \mathcal{L}(E) \text{ n'est idéal à droite de } \mathcal{L}(E).}$

Partie D – Idéaux à gauche de $\mathcal{L}(E)$

D.1 Bien sûr, $\mathcal{G}_F$ n'est pas vide. Si $f, g \in \mathcal{G}_F$, $h \in \mathcal{L}(E)$, $x \in F$, on a :

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 0_E \quad \text{et} \quad (h \circ f)(x) = h(0_E) = 0_E.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{G}_F \text{ est un idéal à gauche de } \mathcal{L}(E).}$

D.2

a Bien sûr, G_β n'est pas vide, et si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$f \circ \beta - g \circ \beta = (f - g) \circ \beta \in \mathcal{L}(E) \quad \text{et} \quad f \circ (g \circ \beta) = (f \circ g) \circ \beta \in \mathcal{L}(E).$$

Ainsi, $\boxed{G_\beta \text{ est un idéal à gauche de } \mathcal{L}(E).}$

b On a l'inclusion évidente $G_\beta \subset \mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(\beta)}$, ce qui permet de définir l'application linéaire $g \mapsto g \circ \beta$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(\beta)}$, de noyau constitué des $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\mathrm{Im}(\beta) \subset \mathrm{Ker}(g)$, donc de dimension $n(n - \mathrm{rg}(\beta))$. Ainsi, l'image de ce morphisme est de dimension $n^2 - n(n - \mathrm{rg}(\beta)) = n\,\mathrm{rg}(\beta) = \dim(\mathcal{G}_\beta)$: $\boxed{G_\beta = \mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(\beta)}.}$

Partie E – Quelques conséquences

E.1 On suppose $F \subset G$. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\mathrm{Im}(f) \subset F$, alors $\mathrm{Im}(f) \subset G$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_F \subset \mathcal{D}_G}$.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $G \subset \mathrm{Ker}(f)$, alors $F \subset \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{G}_G \subset \mathcal{G}_F}$.

E.2 Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$, on a $D_f \subset \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)}$. Pour la même raison, $D_g \subset \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)}$, et donc $D_f + D_g \subset \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)}$.

$D_f + D_g = \mathcal{D}_H$, pour un certain sous-espace vectoriel H de E. H contient $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ (puisque $f, g \in \mathcal{D}_H$), donc leur somme :

$$\mathcal{D}_{\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)} \subset \mathcal{D}_H = D_f + D_g.$$

On a donc bien l'égalité ensembliste $\boxed{\mathcal{D}_{\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)} = D_f + D_g}$.

Il résulte de la question précédente l'inclusion $\mathcal{D}_{\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)} \subset D_f \cap D_g$. Si réciproquement u est un élément quelconque de $D_f \cap D_g$, alors $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(f)$, et $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(g)$, donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)$, d'où l'inclusion réciproque, puis l'égalité : $\boxed{\mathcal{D}_{\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)} = D_f \cap D_g.}$

Comme $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$, on a $G_f \subset \mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)}$. De même, $G_g \subset \mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)}$, et donc $G_f + G_g \subset \mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)}$.

$G_f + G_g$ est un idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$, et il existe donc un sous-espace vectoriel L de E tel que

$$G_f + G_g = \mathcal{G}_L.$$

$\mathcal{G}_L$ contient $\mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)}$: en effet, L est inclus dans $\mathrm{Ker}(f)$ (car $f \in \mathcal{G}_L$) et dans $\mathrm{Ker}(g)$ (car $g \in \mathcal{G}_L$), donc dans leur intersection $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$. Par conséquent,

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)} \subset G_f + G_g.$$

On a donc bien l'égalité ensembliste $\boxed{\mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)} = G_f + G_g}$.

La question E.1 permet de prouver l'inclusion $\mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)} \subset G_f \cap G_g$. Si réciproquement $u \in G_f \cap G_g$, alors $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(u)$, donc $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(u)$: $\quad u \in \mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)}$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)} = G_f \cap G_g}$.

E.3

a D'après les hypothèses, $h \in \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)}$. Or nous avons vu que $\mathcal{D}_{\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)} = D_f + D_g$, ce qui montre l'existence d'endomorphismes u, v de E tels que $\boxed{h = f \circ u + g \circ v.}$

b Les hypothèses donnent ici $h \in \mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)}$. Or nous avons vu l'égalité

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)} = G_f + G_g,$$

d'où l'existence de $w, x \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $\boxed{h = w \circ f + x \circ g.}$