Corrigé de devoir non surveillé

Supplémentarité de l'image et du noyau (Mines-Ponts MP 06)

La réponse est $\boxed{\text{oui}}$:

- $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$:
  Seule l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0_E\}$ n'est pas évidente. Soit $y \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$: on peut écrire $f(y) = 0_E$, et $y = f(x)$ pour un certain vecteur x de E. Comme

  $$f^3(x) - 3af^2(x) + a^2 f(x) = 0_E$$

  on en déduit que $f^2(y) - 3af(y) + a^2 y = 0_E$, soit $a^2 y = 0_E$. Comme a est inversible (a est un élément non nul d'un corps), $y = 0$.
- $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$:
  L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \subset E$ est évidente. Soit $x \in E$. En observant que $f(f^2 - 3af + a^2 \mathrm{Id}_E) = 0$, on constate que $f^2(x) - 3af(x) + a^2 x \in \mathrm{Ker}(f)$. On peut écrire $x = x_K + x_I$, où

  $$x_K = \frac{1}{a^2}(a^2 x + f^2(x) - 3af(x)) \in \mathrm{Ker}(f) \quad \text{et} \quad x_I = \frac{1}{a^2}(-f^2(x) + 3af(x)) \in \mathrm{Im}(f).$$

$\boxed{\mathrm{Ker}\, f \text{ et } \mathrm{Im}\, f \text{ sont supplémentaires dans } E.}$