Devoir non surveillé

Intégration et algèbre linéaire

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions à valeurs réelles, continues et définies sur $\mathbb{R}_+$.
Pour $f \in E$, on note $\phi(f)$ la fonction définie pour x positif ou nul par $\phi(f)(x) = \int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$.

Partie A – L'endomorphisme ϕ

A.1 Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\phi(f)(x) = \frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}.$$

A.2 Déduire que la fonction $\phi(f)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et est continue en 0.

A.3 Montrer que l'application ϕ est un endomorphisme injectif de E.

Partie B – Monotonie de ϕ

B.1 Montrer que si deux éléments f et g de E vérifient $f \leqslant g$, alors $\phi(f) \leqslant \phi(g)$.

B.2 Montrer que si $f \in E$ est croissante (respectivement décroissante), alors $\phi(f)$ est aussi une fonction croissante (respectivement décroissante).

B.3 Montrer que si $f \in E$ est croissante (respectivement décroissante), alors $\phi(f) \leqslant f$ (respectivement $\phi(f) \geqslant f$).

Partie C – Ensemble stable par ϕ

C.1 Soit $f \in E$. Montrer que l'application $x \mapsto \int_0^x (f(t))^2\mathrm{d}t$, définie sur $\mathbb{R}_+$, est croissante. En conséquence, cette application admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$. On note $l < +\infty$ pour exprimer que l est finie.

On considère le sous-ensemble $\mathcal{L}$ de E constitué des éléments f de E vérifiant :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x (f(t))^2\mathrm{d}t < +\infty.$$

Soit $f \in \mathcal{L}$ et F définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour tout $x \geqslant 0$.
Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

C.2 Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_a^b (\phi(f)(t))^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{(F(a))^2}{a} + 2\int_a^b f(t)\phi(f)(t)\mathrm{d}t.$$

C.3 Après avoir remarqué que $(F(a))^2 = a^2(\phi(f)(a))^2$, déduire de l'inégalité précédente :

$$\left(\int_0^b (\phi(f)(t))^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\left(\int_0^b (f(t))^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

C.4 Montrer que si f appartient à $\mathcal{L}$, alors $\phi(f)$ appartient à $\mathcal{L}$.