Corrigé de devoir non surveillé

Intégration et algèbre linéaire

Partie A – L'endomorphisme ϕ

A.1 Soit x strictement positif. Le changement de variable $u = tx$ de classe $\mathcal{C}^1$ donne immédiatement le résultat demandé :

$$\phi(f)(x) = \frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}.$$

A.2 f est continue, donc l'application $F : x \mapsto \int_0^x f$, la primitive de f s'annulant en 0, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. La fonction inverse étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, leur produit $\phi(f)$ est dérivable (donc continu) sur $\mathbb{R}_+^*$. Quant à la continuité en 0 de $\phi(f)$, elle résulte de la dérivabilité de F en 0 (on a reconnu en $\phi(f)(x)$ le taux d'accroissement de F entre 0 et x).

A.3 ϕ est bien une application de E dans lui-même d'après la question précédente. La linéarité de ϕ résulte de celle de l'intégrale. Si $f \in E$ vérifie $\phi(f) = 0$, alors F (cf **I.A.1**), ainsi que sa dérivée f, est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Par continuité en 0, f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$: ϕ est injective.

Partie B – Monotonie de ϕ

B.1 Cette assertion résulte immédiatement de la croissance de l'intégrale (et du fait que $x \geqslant 0$).

B.2 On peut résoudre cette question en revenant à la définition de $\phi(f)$, mais aussi en étudiant le signe de $(\phi(f))'$: soit $f \in E$ croissante. $\phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}\left(f(x) - \frac{1}{x}\int_0^x f\right)$. Or, pour tout $x \geqslant 0$, et par croissance de de f, on a $\int_0^x f \leqslant xf(x)$, ce qui prouve la positivité de $(\phi(f))'$ donc la croissance de $\phi(f)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La continuité de $\phi(f)$ en 0 montre la croissance de $\phi(f)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Appliquer ce résultat à $-f$ si f est supposée décroissante.

B.3 Si $f \in E$ est croissante, alors pour tous $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+$, on a $f(xt) \leqslant f(x)$, ce qui après intégration sur le segment $[0, 1]$ donne immédiatement $\phi(f) \leqslant f$.

Raisonner avec $-f$ si f est supposée décroissante.

Partie C – Ensemble stable par ϕ

C.1 La croissance de l'application considérée résulte aisément de la positivité de la fonction f^2.

C.2 Soit $f \in \mathcal{L}$ et F définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$: on reconnaît la primitive de f s'annulant en 0.

C.3 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

Les fonction u et v définies sur $[a, b]$ par $u(t) = -\frac{1}{t}$ et $v(t) = (F(t))^2$ sont bien sûr de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui autorise l'intégration par parties :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Comme $u'v = (\phi(f))^2$, $uv' = -2f\phi(f)$, et que $\frac{(F(b))^2}{b} \geqslant 0$, on a le résultat annoncé :

$$\int_a^b (\phi(f)(t))^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{(F(a))^2}{a} + 2\int_a^b f(t)\phi(f)(t)\mathrm{d}t.$$

C.4 Comme $(F(a))^2 = a^2(\phi(f)(a))^2$, la quantité $\frac{(F(a))^2}{a} = a(\phi(f)(a))^2$ tend vers 0 lorsque a tend vers 0 ($\phi(f)$ est continue en 0).

L'inégalité précédente donne, lorsque a tend vers 0 :

$$\int_0^b (\phi(f)(t))^2\mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^b f(t)\phi(f)(t)\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\int_0^b f(t)\phi(f)(t)\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^b (f(t))^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^b (\phi(f)(t))^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

Combinant ces deux inégalités, on obtient bien :

$$\left(\int_0^b ((\phi(f))(t))^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\left(\int_0^b (f(t))^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

C.5 Si f appartient à $\mathcal{L}$, l'inégalité précédente montre que pour tout $b > 0$, on a :

$$\int_0^b (\phi(f)(t))^2\mathrm{d}t \leqslant 4 \lim_{x \to +\infty} \int_0^x (f(t))^2\mathrm{d}t$$

Croissante et majorée, la fonction $b \mapsto \int_0^b (\phi(f)(t))^2\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$: $\phi(f) \in \mathcal{L}$.