Corrigé de devoir non surveillé

Inversion et points rationnels sur un cercle

Problème – Inversion et points rationnels sur un cercle

Partie A – Généralités sur l'inversion

1 En exprimant la relation définissant $I(M)$ en termes complexes, on obtient, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $f(z) = \frac{z}{|z|^2}$. Comme $|z|^2 = z\bar{z}$, on a bien : $\boxed{f(z) = \frac{1}{\bar{z}}.}$

2 Pour tout nombre complexe non nul z, on a : $f(f(z)) = \frac{1}{\overline{f(z)}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)} = z$.

Par conséquent, $\boxed{\text{l'inversion est une involution du plan épointé.}}$

3 On a clairement : $\boxed{f(z) = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}.}$

4 Dire que z (nombre complexe non nul) appartient à $f(\mathcal{E})$, c'est dire que $f(z)$ appartient à $f(f(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$. z appartient donc à $f(\mathcal{E})$ si et seulement si $h(f(z)) = 0$.

Ainsi : $\boxed{f(\mathcal{E}) = \{z \in \mathbb{C}^*,\ h(f(z)) = 0\}.}$

Partie B – Image d'un cercle, d'une droite

5

a D'après la question précédente, un nombre complexe non nul z appartient à l'image $f(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ par l'inversion si et seulement si : $(\frac{1}{\bar{z}} - \omega)(\frac{1}{z} - \bar{\omega}) - r^2 = 0$
soit, en multipliant par le nombre non nul $z\bar{z}$:

$$(1 - \omega\bar{z})(1 - \bar{\omega}z) = r^2 z\bar{z}$$

ou encore, en développant :

$$\boxed{(r^2 - |\omega|^2)|z|^2 + \omega\bar{z} + \bar{\omega}z = 1}$$

b Plaçons-nous dans le cas où $O \notin \mathcal{C}$, soit $r^2 - |\omega|^2 \neq 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left(z + \frac{\omega}{r^2 - |\omega|^2}\right)\left(\bar{z} + \frac{\bar{\omega}}{r^2 - |\omega|^2}\right) - \left(\frac{r}{|r^2 - |\omega|^2|}\right)^2 \\
&= z\bar{z} + \frac{z\bar{\omega} + \bar{z}\omega}{r^2 - |\omega|^2} + \frac{|\omega|^2 - r^2}{(r^2 - |\omega|^2)^2} \\
&= |z|^2 + \frac{z\bar{\omega} + \bar{z}\omega - 1}{r^2 - |\omega|^2} \\
&= \frac{1}{r^2 - |\omega|^2}\left((r^2 - |\omega|^2)|z|^2 + \omega\bar{z} + \bar{\omega}z - 1\right).
\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $z \in f(\mathcal{C})$ si et seulement si cette dernière quantité est nulle. En revenant à la première quantité, on constate que $f(\mathcal{C})$ est le $\boxed{\text{cercle de centre } -\frac{\omega}{r^2 - |\omega|^2}}$ et de $\boxed{\text{rayon } \frac{r}{|r^2 - |\omega|^2|}.}$

Dans le cas où $O \in \mathcal{C}$, $f(\mathcal{C})$ est l'ensemble des nombres complexes non nuls z tels que

$$\bar{\omega}z + \omega\bar{z} = 1,$$

soit, en écrivant $z = x + iy$ et $\omega = \frac{1}{2}(a + ib)$ $(x, y, a, b \in \mathbb{R})$:

$$ax + by = 1$$

On reconnaît là une équation de droite (ne passant pas par l'origine) :

$\boxed{f(\mathcal{C}\backslash\{O\}) \text{ est une droite.}}$

c Soit $\mathcal{D}$ une droite ne passant pas par l'origine. Elle admet une équation cartésienne du type $ax+by=1$, pour certains réels a et b. D'après la question précédente, le cercle épointé $\mathcal{C}\backslash\{O\}$ de centre d'affixe $\omega = \frac{1}{2}(a+ib)$, et de rayon $|\omega|$ a $\mathcal{D}$ pour image par f.

L'inversion étant involutive, $\boxed{\mathcal{D} \text{ a pour image par } f \text{ le cercle épointé } \mathcal{C}\backslash\{O\}.}$

6 Le cercle $\mathcal{C}$ de centre d'affixe ω et de rayon $r > 0$ est invariant par f si et seulement si son image est un cercle (*i.e.* $r^2 - |\omega|^2 \neq 0$) de même centre et de même rayon, soit :

$$\omega = -\frac{\omega}{r^2 - |\omega|^2} \quad \text{et} \quad r = \frac{r}{|r^2 - |\omega|^2|},$$

La première relation est satisfaite si et seulement si $\omega = 0$ ou $r^2 - |\omega|^2 = -1$. La seconde l'est si et seulement si $|r^2 - |\omega|^2| = 1$. Les deux relations sont simultanément satisfaites si et seulement si ($\omega = 0$ et $r = 1$) ou ($|\omega|^2 = 1 + r^2$).

Les cercles laissés globalement invariants par l'inversion sont donc les cercles vérifiant $\boxed{|\omega| = \sqrt{1+r^2},}$ et le $\boxed{\text{cercle unité}}$.

Partie C – Points rationnels sur une droite, sur un cercle

7

a La droite d'équation $\boxed{y = \sqrt{2}}$ n'admet pas de point rationnel (car tout point de cette droite a une ordonnée irrationnelle). La droite d'équation $\boxed{y = \sqrt{2}x}$ admet l'origine comme unique point rationnel (toujours parce que $\sqrt{2}$ est irrationnel). Enfin, $\boxed{\text{l'axe des abscisses}}$ admet une infinité de points rationnels.

b Soit $\mathcal{D}$ une droite admettant deux points rationnels distincts M et N. Tous les barycentres de M et N affectés de poids rationnels sont des points rationnels de $\mathcal{D}$. On montre facilement que cet ensemble est infini (par exemple en prenant des milieux à tire-larigot).

On peut aussi raisonner par l'absurde, en supposant que $\mathcal{D}$ n'admet qu'un nombre fini ($\geqslant 2$) de points rationnels. On peut alors prendre deux points rationnels P et Q sur $\mathcal{D}$, tels qu'il n'existe pas de point rationnel entre les deux. Pourtant, le milieu de $[PQ]$ est à coordonnées rationnelles. C'est complètement absurde.

8 Si M est à coordonnées rationnelles, la question 3 montre que $I(M)$ est également à coordonnées rationnelles. Ce résultat, appliqué à $I(M)$ (et non plus à M), montre que si $I(M)$ est à coordonnées rationnelles, alors $M = I(I(M))$ est également à coordonnées rationnelles. L'équivalence est donc prouvée.

9

a On peut raisonner par l'absurde. Supposons que (a, b) soit un point rationnel du cercle considéré. On a alors $\sqrt{2} = a^2 + b^2 \in \mathbb{Q}$, ce qui est effectivement absurde :

$\boxed{\text{Le cercle de centre } O \text{ de rayon } 2^{\frac{1}{4}} \text{ n'admet pas de point rationnel.}}$

b La droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = \sqrt{2}$ n'admet pas de point rationnel. Son image $I(\mathcal{D})$ par l'inversion n'admet donc pas non plus de point rationnel. Cette image étant un cercle épointé $\mathcal{C}\backslash\{O\}$, ce cercle $\mathcal{C}$ admet pour unique point rationnel l'origine.

Un raisonnement analogue montre que l'image par l'inversion d'une droite ne passant pas par l'origine, et n'admettant qu'un point rationnel (par exemple la droite d'équation $y = \sqrt{2}x + 1$) est un cercle admettant exactement deux points rationnels, dont l'origine.

c Par hypothèse, $\mathcal{C}\backslash\{O\}$ admet au moins deux points rationnels. D'après 8, il y a bijection entre l'ensemble des points rationnels de $\mathcal{C}\backslash\{O\}$ et l'ensemble des points rationnels de $I(\mathcal{C}\backslash\{O\})$. Ce dernier ensemble est une droite, et admet au moins deux points rationnels. D'après 7.b, cette droite admet une infinité de points rationnels.

$\boxed{\mathcal{C} \text{ admet donc lui-même une infinité de points rationnels.}}$