CONCOURS COMMUN SUP 2002
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques (filière MPSI)

Proposition de correction

Corrigé du problème I

1. Si A, B et C sont trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

- Avec $P = I_3$ on a $A \sim A$ et $\sim$ est réflexive.
- Si $A \sim B$ il existe P de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}.\,B.\,P$ alors $B = (P^{-1})^{-1}.\,A.\,P^{-1}$ et $B \sim A$ c'est donc que $\sim$ est symétrique.
- Si $A \sim B$ et $B \sim C$, il existe P et Q de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que : $A = P^{-1}.\,B.\,P$ et $B = Q^{-1}.\,C.\,Q$ et ainsi $A = (Q.\,P)^{-1}.\,C.\,(Q.\,P)$, $Q.\,P$ appartenant au groupe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, c'est donc que $A \sim C$ et $\sim$ est transitive.

2. Si $A \sim B$ il existe P de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}.\,B.\,P$ et alors

$$\det A = \det P^{-1} \det B \det P = \det B.$$

Par contraposée, deux matrices de déterminants différents ne sont pas semblables.

3. w est l'application de $\mathrm{Ker}\, u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.

a. Si $y \in \mathrm{Im}\, w, \exists x \in \ker u^{i+j}$, $y = w(x)$ c'est à dire, $y = u^j(x)$.
Alors, $u^i(y) = u^{i+j}(x) = 0$ et $y \in \ker u^i$.
Conclusion, $\mathrm{Im}\, w \subset \ker u^i$.

b. En utilisant le théorème du rang pour w, $\dim \ker u^{i+j} = \dim \mathrm{Im}\, w + \dim \ker w$.
Or, $\mathrm{Im}\, w \subset \ker u^i$ et $\ker w \subset \ker u^j$ (remarque : on a même $\ker w = \ker u^j$) on en déduit que : $\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.

4. u est un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\mathrm{rang}\, u = 2$.

a. De $u^3 = 0$ on tire que $\dim \ker u^3 = 3$ et de $\mathrm{rang}\, u = 2$, $\dim \ker u = 1$.
Si on utilise la question 3b. pour $i = 2, j = 1$, on a $\dim \ker u^2 \geq 3 - 1 = 2$.
Si on utilise la question 3b. pour $i = 1, j = 1$, on a $\dim \ker u^2 \leq 2$.
Conclusion : $\dim \ker u^2 = 2$.

b. Puisque $\ker u^2 \neq E$, il existe un vecteur non nul a de E qui n'est pas dans $\ker u^2$ et vérifie donc $u^2(a) \neq 0$.
Si $\alpha\, u^2(a) + \beta\, u(a) + \gamma\, a = 0$, en composant par u^2 on a $\gamma = 0$ puis par u, $\beta = 0$ et enfin $\alpha = 0$ car a non nul. La famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E car libre formée de 3 vecteurs de E.

c. On trouve facilement : $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. u est un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\mathrm{rang}\, u = 1$.

a. Si tout vecteur b non nul de E vérifiait $u(b) = 0$ alors on aurait $\ker u = E$ ce qui ne va pas avec $\dim \ker u^2 = 2$. Alors on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

b. Si $\alpha\, b + \beta\, u(b) + \gamma\, c = 0$, en composant par u, $\alpha\, u(b) = 0$ ce qui donne $\alpha = 0$ et comme $(u(b), c)$ est libre on a $\beta = \gamma = 0$. La famille $(b, u(b), c))$ est une base de E car libre formée de 3 vecteurs de E.

c. On trouve facilement : $U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. $A \sim T$ donc, $\det A = \det T = 1 \neq 0$ donc A est inversible.

7. On trouve $N^3 = 0$ et ensuite de $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3$ on tire que $T^{-1} = I_3 - N + N^2$ et comme $P^{-1}.A.P = T$, $\quad P^{-1}.A^{-1}.P = T^{-1} = I_3 - N + N^2$.

8. Si $N = 0$, alors $A = I = A^{-1}$ et, $A^{-1} \sim A$.

9. On suppose dans cette question que $\text{rang}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

a. Puisque $N^3 = 0$ $\text{rang}(N) = 2$, d'après la question 4c. N est semblable à U et M est semblable à V.

b. Alors on a facilement M^3 semblable à V^3 et donc $M^3 = 0$ de plus, $\text{rang}(M) = \text{rang}(V) = 2$.

c. Ainsi, M vérifie les hypothèses de la question 4 et on en déduit que $M \sim U$ et comme $N \sim U$ par transitivité, $M \sim N$.

d. Alors il existe Q de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $M = Q^{-1}.N.Q$ on en déduit que $I_3 + M = Q^{-1}.(I_3 + N).Q$.

Par ailleurs, on a $\quad A \sim I_3 + N$ et $A^{-1} \sim I_3 + M$.

Conclusion : $A^{-1} \sim A$.

10. On suppose dans cette question que $\text{rang}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et comme $\text{rang}(N) = 1$, nécessairement $\alpha = 0$ ou $\gamma = 0$ ainsi, $N^2 = 0$.

La matrice N vérifie alors la question 5 et N est semblable à U' et M est semblable à V'. Alors $M^2 = 0$ et $\text{rang}(M) = 1$, ainsi la matrice M vérifie alors la question 5 et $M \sim U'$ et comme $N \sim U'$ par transitivité, $M \sim N$. On termine comme dans la question 9d.

Conclusion : $A^{-1} \sim A$.

11. Exemple : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{Ker}(u - id_E)$ est un espace vectoriel de E car c'est le noyau d'un endomorphisme, il est de dimension 2 car $\operatorname{rang}(A - I_3) = 1$.

Si on pose $v = u - id_E$, on a $v(a) = 0$, $v(b-c) = 0$ et on peut choisir $e_1 = a$ et $e_2 = b - c$.

b. $\det(e_1, e_2, c) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ ainsi (e_1, e_2, c) est une base de E et la matrice de u dans cette base est $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car $u(c) = -b + 2c = -e_2 + c$.

c. Comme $A \sim T$, on a bien $A^{-1} \sim A$.

12. NON car si on choisit $A = -I_3$ on a $A^{-1} \sim A$ mais $\det A = -1 \neq \det T$.

Corrigé du problème II

1. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^p}$ étant décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$, pour tout $t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{(k+1)^p} \leq \dfrac{1}{x^p} \leq \dfrac{1}{k^p}$ et en intégrant on a pour tout entier $k \geq 1$, $\dfrac{1}{(k+1)^p} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x \leq \dfrac{1}{k^p}$.

2. On somme les inégalités précédentes pour $k = 1$ à $k = n-1$, on utilise la relation de Chasles et on obtient : pour $n \geq 2$, $S_n(p) - 1 \leq \displaystyle\int_1^n \dfrac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x \leq S_{n-1}(p)$.

3. p est un entier naturel non nul.

La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^p}$ est positive sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on pose alors $F(x) = \displaystyle\int_1^x \dfrac{1}{t^p}\,dt$.

- Si $p = 1$, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} F(x) = +\infty$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^p}$ n'est pas intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
- Si $p \geq 2$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x \dfrac{1}{t^p}\,dt = \dfrac{1}{1-p}(x^{1-p} - 1) = \dfrac{1}{1-p}\left(\dfrac{1}{x^{p-1}} - 1\right)$ et $\displaystyle\lim_{x \to \infty} F(x) = \dfrac{1}{p-1}$.

  Alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^p}$ est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

On conclut que : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^p}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $p \geq 2$.

4. p et n sont deux entiers naturels non nuls et on pose $S_n(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^p}$.

- Si $p=1$, $\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}dx=+\infty$ donc la question **2**. nous donne $\lim_{n\to\infty} S_{n-1}(p)=+\infty$.
- Si $p\geq 2$, $\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{p-1}$. La suite $(S_n(p))_{n\geq 1}$ est croissante comme somme de nombres positifs elle est, par la question **2**., majorée par $1+\frac{1}{p-1}$ donc converge.

Conclusion : la suite $(S_n(p))_{n\geq 1}$ converge si et seulement si $p\geq 2$.

On note alors $\zeta(p)=\lim_{n\to+\infty} S_n(p)$.

5. $\varphi(t)=\dfrac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\frac{t}{2}}$ pour $t\in]0,\pi]$ et $\varphi(0)=-1$.

- La fonction φ est continue pour $t\in]0,\pi]$ car quotient de fonctions continues.
- $\sin\frac{t}{2}\sim\frac{t}{2}$ en 0, ainsi $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=-1=\varphi(0)$ et la fonction φ est continue en 0.
- La fonction φ est de classe C^1 pour $t\in]0,\pi]$ car quotient de fonctions de classe C^1.
- pour $t\in]0,\pi]$, $\varphi'(t)=\dfrac{(-1+\frac{t}{\pi})\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{2}(t-\frac{t^2}{2\pi})\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\ldots=\dfrac{\frac{1}{4\pi}t^2+o(t^2)}{\frac{t^2}{2}+o(t^2)}$.

  Ainsi $\lim_{t\to 0}\varphi'(t)=\frac{1}{2\pi}$, on en déduit à la fois que la fonction φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0)=\frac{1}{2\pi}$ et que la fonction φ' est continue en 0.
  - Conclusion : la fonction φ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

6. Posons $I_k=\int_0^\pi h(t)\cos(k\,t)\,dt$.

Par une intégration par parties : $u(t)=h(t)\Rightarrow u'(t)=\frac{t}{\pi}-1$ et $v'(t)=\cos(kt)$, $v(t)=\frac{\sin(kt)}{k}$ on a $I_k=-\frac{1}{k}J_k$ où $J_k=\int_0^\pi(\frac{t}{\pi}-1)\sin(kt)dt$.

Par une intégration par parties : $u(t)=\frac{t}{\pi}-1\Rightarrow u'(t)=\frac{1}{\pi}$ et $v'(t)=\sin(kt)$, $v(t)=\frac{-\cos(kt)}{k}$ on a $J_k=\left[(\frac{t}{\pi}-1)(-\frac{\cos(kt)}{k})\right]_0^\pi+\frac{1}{k\pi}\int_0^\pi\cos(kt)dt=\frac{-1}{k}$.

Conclusion : $I_k=\frac{1}{k^2}$.

7. Pour $t \in]0,\pi]$, $\sum_{k=1}^{n}\cos(k\,t) = \mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}) = \dfrac{e^{it}-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} = \dfrac{e^{it}e^{i\frac{nt}{2}}(e^{-i\frac{nt}{2}}-e^{i\frac{nt}{2}})}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}})} = e^{i\frac{(n+1)t}{2}}\dfrac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$.

Ainsi, pour $t \in]0,\pi]$, $\sum_{k=1}^{n}\cos(k\,t) = \dfrac{\sin\frac{nt}{2}\cos\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$.

De la formule : $\sin a\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$ on déduit que

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(k\,t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \text{ et } \lambda = \frac{1}{2}.$$

8. La fonction ψ étant de classe C^1, on pose $M = \sup_{[0,\pi]}|\psi(t)|$ et $M' = \sup_{[0,\pi]}|\psi'(t)|$.

On pose $K_n = \int_0^{\pi}\psi(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)\,\mathrm{d}t$ et on a, en intégrant par parties :

$$K_n = \frac{2}{2n+1}\left[-\psi(t)\cos((n+\frac{1}{2})t)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi}\psi'(t)\cos((n+\frac{1}{2})t)dt$$

Ainsi, $|K_n| \le \dfrac{2}{2n+1}\left(2M + \int_0^{\pi}M'dt\right) \le \dfrac{2}{2n+1}(2M+\pi M')$ et $\lim K_n = 0$.

9. $S_n(2) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}h(t)\cos(kt)dt = \int_0^{\pi}h(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)dt = \int_0^{\pi}\varphi(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt - \int_0^{\pi}\frac{1}{2}h(t)dt$.

Puisque la fonction φ est de classe C^1sur $[0,\pi]$, en utilisant la question **12 :**

$\zeta(2) = \lim S_n(2) = -\int_0^{\pi}\frac{1}{2}h(t)dt = \frac{\pi^2}{6}$

10. On pose $f_n(x) = \dfrac{x^n\,(1-x)^n}{n\,!}$.

a. Par la formule du binôme, $x^n(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k x^{n+k}$ et si on pose pour $n \le i \le 2n$,

$e_i = C_n^{i-n}(-1)^{i-n} \in \mathbf{Z}$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{n\,!}\sum_{i=n}^{2n}e_i\,x^i$.

b. Si $k<n$ ou $k>2n$, $f_n^{(k)}(0)=0$ et si $n \le k \le 2n$, $f_n^{(k)}(0) = \dfrac{k\,!}{n\,!}e_k \in \mathbf{Z}$.

Par ailleurs en remarquant que $f_n(x) = f_n(1-x)$, on a que $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x)$ et ainsi, $f_n^{(k)}(1) = (-1)^k f_n^{(k)}(0) \in \mathbf{Z}$.

11. On pose $F_n(x) = b^n(\pi^{2n}\,f_n(x) - \pi^{2n-2}\,f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4}\,f_n^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x))$.

a. De $\pi^2 = \frac{a}{b}$, on a $F_n(x) = a^n\ f_n(x) - a^{n-1}b\ f_n^{(2)}(x) + a^{n-2}b^2\ f_n^{(4)}(x) - ... + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)$ et en utilisant la question 1c. on a que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

b. $g_n'(x) = F_n''(x)\sin(\pi x) + F_n'(x)\cos(\pi x)\pi - F_n'(x)\cos(\pi x)\pi + \pi^2 F_n(x)\sin(\pi x)$
$= \left(F_n''(x) + \pi^2 F(x)\right)\sin(\pi x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x)\sin(\pi x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)$.

Alors, $A_n = \pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)\,dx = \left[\frac{1}{\pi} F_n'(x)\sin(\pi x) - F_n(x)\cos(\pi x)\right]_0^1 = F_n(0) + F_n(1)$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, A_n est entier.

12. On pose, pour l'entier a de la question précédente, $u_n = \frac{a^n}{n!}$.

a. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$ et donc $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$; ainsi pour $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, u_{n+1} < \frac{1}{2} u_n$.

Pour $n \geq N, u_n \leq (\frac{1}{2})^{n-N} u_N$ et par suite $\lim u_n = 0$.

b. $\lim u_n = 0$ ainsi pour $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, u_n < \frac{1}{2}$.

c. Comme $x \in [0, 1]$, $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq 1 - x \leq 1$ d'où, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$.

d. On a $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$ d'où $0 \leq A_n \leq \pi \int_0^1 a^n \frac{1}{n!} \sin(\pi x)\,dx = 2\frac{a^n}{n!}$.

$A_n \neq 0$ car la fonction $x \mapsto a^n f_n(x)\sin(\pi x)$ est continue positive et non identiquement nulle sur $[0, 1]$.

Pour $n \geq n_0$, $0 < A_n < 1$ ce qui est en contradiction avec A_n entier.

L'hypothèse $\pi^2 = \frac{a}{b}$ ne tient plus et π^2 est irrationnel.

Conclusion : de π^2 irrationnel on déduit que $\zeta(2)$ est irrationnel.

e. Le carré d'un rationnel étant un rationnel, π ne peut être rationnel.