Devoir non surveillé

Problème – D'après E3A PSI 2007

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice unité de cet espace sera notée I_n et la matrice nulle 0_n.

On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{C}^n$.

Si v est un endomorphisme de E, on rappelle que :

– v^0 est l'endomorphisme unité (*i.e.* $v^0 = \mathrm{Id}_E$).

– $\forall\, m \in \mathbb{N}, \quad v^{m+1} = v \circ v^m$.

L'endomorphisme v sera dit *nilpotent* s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = 0$ (endomorphisme nul de E). On définit de même une matrice nilpotente.

On note J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux en position $(i, i+1)$, qui valent 1 ($i \in [\![1, n-1]\!]$).

Étant donné une matrice nilpotente N, on appelle *exponentielle* de N et on note $\exp(N)$ la matrice $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{N^k}{k!}$.

Partie A – Quelques propriétés de J

A.1 Déterminer le rang de J.

A.2

a Déterminer J^k pour $k \in \mathbb{N}$.

b Vérifier que toutes les puissances de J – sauf celle d'exposant 0 – sont nilpotentes.

A.3 Calculer $\exp(J)$.

A.4

a Montrer que toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.

b Généraliser (rapidement) ce dernier résultat.

c Donner un exemple de deux matrices nilpotentes de taille 2 dont la somme n'est pas nilpotente.

A.5 Montrer que $\exp(J) - I_n$ est une matrice nilpotente de rang $n - 1$.

Partie B – Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de E.

B.1 Prouver que pour tous entiers naturels i et j, $\mathrm{Ker}(u^i) \subset \mathrm{Ker}(u^{i+j})$.

B.2 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\mathrm{Ker}(u^m))$. Prouver l'existence de

$$r = \inf\{m \in \mathbb{N}, t_m = t_{m+1}\}.$$

B.3 Montrer que :
a Pour tout entier naturel m, tel que $m < r$, $\mathrm{Ker}(u^m)$ est strictement inclus dans $\mathrm{Ker}(u^{m+1})$.
b $\mathrm{Ker}(u^r) = \mathrm{Ker}(u^{r+1})$.
c Pour tout entier $m \geqslant r$, $\mathrm{Ker}(u^m) = \mathrm{Ker}(u^{m+1})$.

Partie C – Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

Soit V une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$ et vérifiant $V^n = 0_n$. On note v l'endomorphisme de E canoniquement associé à V.

C.1 Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\Im(v^p)$.
a Déterminer $\Im(w)$.
b Prouver que $\mathrm{Ker}(w) \subset \mathrm{Ker}(v^q)$.
c Vérifier alors que l'on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(v^{p+q})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(v^p)) + \dim(\mathrm{Ker}(v^q)).$$

d En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}(v^i)) \leqslant i$.
e Démontrer qu'en fait $\dim(\mathrm{Ker}(v^i)) = i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

C.2 Prouver alors que $v^{n-1} \neq 0$.

C.3 En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que

$$\mathcal{B}_1 = (v^{n-1}(e), \dots, v(e), e)$$

soit une base de E.

C.4 Écrire la matrice de v dans cette base.

C.5 Montrer que si u et v sont deux endomorphismes nilpotents de $\mathbb{C}^n$ de rang $n-1$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbb{C}^n$, alors $M_{\mathcal{B}}(u)$ et $M_{\mathcal{C}}(v)$ sont semblables.

Partie D – Exponentielles des matrices nilpotentes en basse dimension

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *unipotente* si $M - I_n$ est nilpotente.

D.1 Montrer que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est unipotente.

D.2 Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $P^{-1}NP$ est nilpotente, et que

$$\exp(P^{-1}NP) = P^{-1}\exp(N)P.$$

D.3 Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que M est unipotente si et seulement si elle est l'exponentielle d'une matrice nilpotente.
Indication : discuter selon le rang de la matrice nilpotente $M - I_2$.

D.4 On se place désormais dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
a Montrer que si $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $N^3 = 0$.
b Soit $V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice unipotente, $U = V - I_3$, $W = U - U^2/2$. Montrer que W est une matrice nilpotente d'exponentielle V.
c Montrer que $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est unipotente si et seulement si elle est l'exponentielle d'une matrice nilpotente.