Corrigé de devoir non surveillé

Problème – D'après E3A PSI 2007

Partie A – Quelques propriétés de J

A.1 J étant échelonnée et comportant $n-1$ lignes non nulles, elle est de rang $n-1$.

A.2

a Si $k \leqslant n-1$, J^k est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux en position $(i, i+k)$ qui valent 1. Si $k \geqslant n$, J^k est nulle. On peut montrer ce résultat par récurrence, ou plus simplement en considérant l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à J : $u(e_1)=0$, et $u(e_{i+1})=e_i$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.

b $J^n = 0_n$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(J^k)^n = (J^n)^k = 0_n^k = 0_n$ (car $k \neq 0$).
Toutes les puissances de J – sauf celle d'exposant 0 – sont nilpotentes.

A.3 $\exp(J)$ est la matrice triangulaire supérieure dont le coefficient en position (i,j) vaut $1/(j-i)!$ si $j \geqslant i$.

A.4

a Si on multiplie une matrice nilpotente par un scalaire, on obtient bien sûr une matrice nilpotente. On a vu en TD que la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent est nilpotente : toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.

b Toute combinaison linéaire de matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.

c $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes, pas leur somme.

A.5 $\exp(J) - I_n$ est une matrice nilpotente, car combinaison linéaire de telles matrices commutant deux à deux. Elle est en outre de rang $n-1$ car échelonnée à $n-1$ lignes non nulles.

Partie B – Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme

B.1 Si $x \in \operatorname{Ker}(u^i)$, alors $u^i(x)=0$ et donc, puisque $u^j(0)=0$: $u^{i+j}(x)=0$.
$\operatorname{Ker}(u^i) \subset \operatorname{Ker}(u^{i+j})$.

B.2 L'ensemble $\{m \in \mathbb{N}, t_m = t_{m+1}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (car $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels majorée par n), et admet donc un plus petit élément. En particulier, r existe bien.

B.3 Remarquons que pour tout entier naturel m, $\operatorname{Ker}(u^m)$ est inclus dans $\operatorname{Ker}(u^{m+1})$.

a Par définition de r, on a, pour tout entier $m < r$, $t_m \neq t_{m+1}$: $\operatorname{Ker}(u^m)$ est donc strictement inclus dans $\operatorname{Ker}(u^{m+1})$.

b $\operatorname{Ker}(u^r) = \operatorname{Ker}(u^{r+1})$, car $\operatorname{Ker}(u^r)$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Ker}(u^{r+1})$, de même dimension (finie).

c Montrons par récurrence que pour tout entier $m \geqslant r$, $\operatorname{Ker}(u^m) = \operatorname{Ker}(u^{m+1})$. L'amorçage au rang r a déjà été effectué, et si on suppose la formule vraie à un rang $m \geqslant r$ fixé, alors, pour tout $x \in \operatorname{Ker}(u^{m+2})$, on a $u(x) \in \operatorname{Ker}(u^{m+1}) = \operatorname{Ker}(u^m)$, donc $x \in \operatorname{Ker}(u^{m+1})$, puis $\operatorname{Ker}(u^{m+2}) \subset \operatorname{Ker}(u^{m+1})$. Comme l'inclusion réciproque est bien connue, l'hérédité est prouvée.

Partie C – Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

C.1

a $\Im(w) = v^q(\Im(v^p)) = \Im(v^{p+q})$.

b $\operatorname{Ker}(w) = \Im(v^p) \cap \operatorname{Ker}(v^q) \subset \operatorname{Ker}(v^q)$.

c Le théorème du rang appliqué à w donne

$$\operatorname{rg}(v^p) = \operatorname{rg}(w) + \dim(\operatorname{Ker}(w)),$$

puis, compte tenu des questions précédentes

$$\operatorname{rg}(v^p) \leqslant \operatorname{rg}(v^{p+q}) + \dim(\operatorname{Ker}(v^q)),$$

soit, en appliquant le théorème du rang à v^p et v^{p+q} :

$$\dim(\operatorname{Ker}(v^{p+q})) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(v^p)) + \dim(\operatorname{Ker}(v^q)).$$

d D'après le théorème du rang appliqué à v, $\dim(\operatorname{Ker}(v)) = 1$ (v est de rang $n-1$), d'où, en prenant $q = 1$ dans la formule précédente :

$$\dim(\operatorname{Ker}(v^{p+1})) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(v^p)) + 1,$$

pour tout entier naturel p. Une récurrence immédiate sur i permet alors de montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(\operatorname{Ker}(v^i)) \leqslant i$.

e Comme $\dim(\operatorname{Ker}(v^{n-1})) \leqslant n-1 < n = \dim(\operatorname{Ker}(v^n))$ ($v^n = 0$), la suite finie d'entiers $(\dim(\operatorname{Ker}(v^i)))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est strictement croissante (cf. B.3.a), de premier terme 1 et de dernier terme n, ce qui force $\dim(\operatorname{Ker}(v^i)) = i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

C.2 $\dim(\operatorname{Ker}(v^{n-1})) = n - 1 \neq n$, donc $v^{n-1} \neq 0$.

C.3 Il existe un vecteur e de E tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. On vérifie alors (comme on l'a fait déjà plusieurs fois en cours/TD/colle/DM/DS) que $\mathcal{B}_1 = (v^{n-1}(e), \ldots, v(e), e)$ est une base de E.

C.4 La matrice de v dans cette base n'est autre que J.

C.5 u et v admettent dans des bases adaptées J pour représentation matricielle : $M_{\mathcal{B}}(u)$ et $M_{\mathcal{C}}(v)$ sont par conséquent semblables à J, et sont donc semblables.

Partie D – Exponentielles des matrices nilpotentes en basse dimension

D.1 Si N est nilpotente, il en est de même de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{N^k}{k!}$ d'après A.4.b. Ainsi, l'exponentielle d'une matrice nilpotente est unipotente.

D.2 Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^r = 0_n$.

La conjugaison par P étant un automorphisme de l'espace vectoriel et de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $(P^{-1}NP)^r = P^{-1}N^rP = 0_n$, donc $P^{-1}NP$ est nilpotente, et

$$\exp(P^{-1}NP) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(P^{-1}NP)^k}{k!} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{P^{-1}N^kP}{k!} = P^{-1}\exp(N)P.$$

D.3 Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ On sait déjà que si M est l'exponentielle d'une matrice nilpotente, alors elle est unipotente. Supposons réciproquement M unipotente. La matrice $M - I_2$ étant nilpotente, elle n'est pas inversible : son rang vaut 0 ou 1.

Si $M - I_2$ est de rang 0, alors $M = \exp(0_2)$. Si $M - I_2$ est de rang 1, alors elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $M = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P$ pour un certain élément P de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Comme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$M = P^{-1}\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) P = \exp\left(P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P\right),$$

M est donc bien l'exponentielle d'une matrice nilpotente.

M est unipotente si et seulement si elle est l'exponentielle d'une matrice nilpotente.

D.4

a Supposer $N^3 \neq 0$ conduirait à une absurdité : en effet, en raisonnant en termes d'endomorphisme canoniquement associé v, il existerait $x \in \mathbb{C}^3$ tel que $(x, v(x), v^2(x), v^3(x))$ soit une famille libre de quatre vecteurs de $\mathbb{C}^3$.

Si $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $N^3 = 0$.

b W est nilpotente car U et U^2 le sont et commutent. De plus, $W^3 = 0$, donc

$$\exp(W) = I_3 + W + \frac{W^2}{2} = I_3 + U - \frac{U^2}{2} + \frac{1}{2}\left(U - \frac{U^2}{2}\right)^2 = I_3 + U = V.$$

W est une matrice nilpotente d'exponentielle V.

c Un sens est connu, et l'autre résulte immédiatement de la question précédente : $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est unipotente si et seulement si elle est l'exponentielle d'une matrice nilpotente.