DM de MPSI2

Corrigé de devoir non surveillé

Quelques aspects de la méthode de Newton

Partie A – Résultats généraux et exemples simples

A.1 On a $N_\delta\ : x \mapsto x - \frac{x^3+16}{3x^2}$ (sur $\mathbb{R}^*$). Pour $x_0 = 2$, $x_1 = N_f(x_1) = 2 - \frac{24}{12} = 0$, et il n'est donc pas possible de définir x_2 : la suite de Newton n'est pas bien définie.

A.2 Un calcul (très) simple montre que $N_{\exp} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} - 1$, *i.e.*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, N_{\exp}(x) = x - 1$$

La suite de Newton (x_n) est donc bien définie, arithmétique de raison -1. Son terme général vaut donc

$$x_n = x_0 - n,$$

pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$. Une telle suite tend bien sûr vers $-\infty$.
Remarque : on aurait aussi pu dire que cette suite était strictement décroissante, et divergente, puisque l'itératrice $N_{\exp}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et sans point fixe.

A.3 N_φ est donnée par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, N_\varphi(x) = \frac{1}{2}x.$$

La suite de Newton associée à φ et x_0 est bien définie ($\mathbb{R}^*$ est stable par N_φ) et géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, et tend donc vers 0.

A.4

a $N_f(l)$ est bien défini (puisque $f'(l) \neq 0$), et $N_f(l) = l - \frac{f(l)}{f'(l)} = l$. Par ailleurs, puisque f est deux fois dérivable, $N'_f(l) = 1 - \frac{(f'(l))^2 - f''(l)f(l)}{(f'(l))^2} = 0$.

Par continuité de N'_f en l (valable car f est de classe $\mathcal{C}^2$), et comme $N'_f(l) = 0$, $|N'_f| \leqslant \frac{1}{2}$ au voisinage de l, donc N_f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur un voisinage $\mathcal{V}$ de l, que l'on peut supposer être de la forme $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Appliquons ce résultat à $x \in \mathcal{V}$ et l : nous obtenons

$$|N_f(x) - l| = |N_f(x) - N_f(l)| \leqslant \frac{1}{2}|x - l|.$$

A.5 Soit $x_0 \in \mathcal{V}$. D'après la relation précédente, on observe que $\mathcal{V}$ est stable par N_f. Comme il possède en outre x_0, la suite (x_n) est bien définie. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_{n+1} - l| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - l|,$$

(d'après la question précédente pour $x = x_n$), et, par récurrence immédiate

$$|x_n - l| \leqslant \frac{1}{2^n}|x_0 - l|,$$

d'où le résultat demandé.

Supposons maintenant que $x_0 \in \mathbb{R}$, et qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que (x_{n_0} soit bien défini et) appartienne à $\mathcal{V}$. En appliquant le résultat précédent à la suite de Newton de terme initial x_{n_0}, on trouve que la suite de Newton de terme initial x_0 est bien définie (x_n est bien défini pour $n \leqslant n_0$ et pour $n \geqslant n_0$), et converge vers l avec une vitesse au pire géométrique.

Partie B – Bassin immédiat

B.1

a L'ensemble des solutions de l'équation $\rho(x) = 0$ est $\{-1, 0, 1\}$.

b Pour tout x tel que $\rho'(x) \neq 0$ (*i.e.* $x \notin \{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$), on a $N_\rho(x) = x - \frac{x^3-x}{3x^2-1} = \frac{2x^3}{3x^2-1}$

La fonction ρ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale), ses dérivées première ($x \mapsto 3x^2-1$) et seconde ($x \mapsto 6x$) sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur $[1, +\infty[$.

Soit $x \geqslant 1$. ρ est convexe sur $[1, +\infty[$, et donc $\rho(x') \geqslant \rho(x) + \rho'(x)(x'-x)$ pour tout $x' \geqslant 1$. Pour $x' = 1$, ceci conduit à

$$0 \geqslant \rho(x) + \rho'(x)(1-x),$$

donc à

$$1 \leqslant N_\rho(x).$$

Enfin, $N_\rho(x) - x = -\frac{x^3-x}{3x^2-1}$ puisque $x \geqslant 1$.

On a bien $1 \leqslant N_\rho(x) \leqslant x$.

c D'après la question précédente, pour tout $x_0 \geqslant 1$, la suite de Newton (x_n) est bien définie ($[1, +\infty[$ est stable par l'itératrice N_ρ et comprend x_0), et décroissante. Elle est donc convergente, vers un point fixe de N_ρ sur $[1, +\infty[$, par continuité : elle converge donc vers 1.

B.2

a Soit $x, y \in I(0)$: il existe des intervalles stylés J_x et J_y tels que $x \in J_x$ et $y \in J_y$. J_x (resp. J_y) contient le segment joignant 0 à x (resp. y), donc $J_x \cup J_y$ contient le segment d'extrémités x et y : comme $J_x \cup J_y \subset I(0)$, $I(0)$ est convexe, donc un intervalle.

$I(0)$ est borné puisque majoré $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et minoré par $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (sinon, par convexité de $I(0)$, l'un de ces nombres appartiendrait à $I(0)$).

Remarque : on aurait aussi pu majorer par 1 et minorer par -1 et utiliser la question précédente.

b Soit $x_0 \in I(0)$, et $\mathcal{V} =]-\varepsilon, +\varepsilon[$ comme dans la question A.4. Par convergence de (x_n) vers 0, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel $x_{n_0} \in]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$. Or $x_{n_0} = N_f^{\circ n_0}(x_0)$, et la fonction $N_\rho^{\circ n_0}$ est continue en x_0. Par conséquent, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $y_0 \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, on ait $N_\rho^{\circ n_0}(y_0) \in \mathcal{V}$. D'après A.4, la suite de Newton de terme initial y_0 converge donc, et $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset I(0)$.

$\mathcal{V}$ est donc voisinage de chacun de ses points, *i.e.* $\mathcal{V}$ est ouvert.

c On considère $x_0 \in \mathbb{R}$. Par imparité de la fonction N_ρ, on montre par une récurrence immédiate que les suites de Newton de termes initiaux opposés sont opposées. Par conséquent, $x_0 \in I(0)$ si et seulement si $-x_0 \in I(0)$, d'où $\alpha = -\beta$.

d Soit $x_0 \in I(0) \cap \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $y_0 \in [0, x_0]$, la suite de Newton (y_n) associée à y_0 converge vers 0, donc la suite de Newton associée à $y_1 = N_\rho(y_0)$, qui en est extraite, converge également vers 0. Or $N_\rho([0, x_0])$ est un intervalle (car image continue d'un intervalle), et comprend $0 = N_\rho(0)$ et $N_\rho(x_0)$: il contient donc le segment d'extrémités 0 et $N_\rho(x_0)$. Ainsi, $N_\rho(x_0) \in I(0)$. Ceci prouve $N_\rho([0, \beta[) \subset I(0)$. De même, ou par imparité de N_ρ, $N_\rho(]\alpha, 0]) \subset I(0)$.

On a donc bien :

$$N_\rho(]\alpha, \beta[) \subset]\alpha, \beta[$$

e Prouvons par exemple que $\rho(\beta) \neq 0$: on sait déjà que $0 \neq \beta$. Si $\rho(\beta) = 0$, alors le théorème de Rolle appliqué à N_ρ entre 0 et β prouve l'existence de $x \in]0, \beta[\subset I(0)$ tel que $\rho'(x) = 0$: x ne peut donc appartenir à $I(0)$ (la suite de Newton associée n'est même pas bien définie), ce qui est absurde. De même $\rho(\alpha) \neq 0$.

Remarque : pour la fonction considérée, on peut aussi simplement remarquer que α et β sont différents de 0, -1 et 1.

f Prouvons par exemple que $\rho'(\beta) \neq 0$: si $\rho'(\beta) = 0$, alors $\lim\limits_{\beta^-} |N_\rho(x)| = +\infty$, et il existerait donc $x \in I(0)$ tel que $N_\rho(x) \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$: la suite de Newton de terme initial x convergerait alors vers 1 ou -1, ce qui est absurde. De même, $\rho'(\alpha) \neq 0$.

g N_ρ est continue en α et β, puisque ρ et ρ' le sont (et que ρ' ne s'annule pas en ces points). On en déduit (comme en outre $N_\rho(]\alpha, \beta[) \subset]\alpha, \beta[$) que $N_\rho(\alpha) \in [\alpha, \beta]$. Or $N_\rho(\alpha) \notin]\alpha, \beta[$ (sinon $\alpha \in I(0)$), et $N_\rho(\alpha) \neq \alpha$ (par exemple car le seul point fixe de N_ρ dans $]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ est $0 \neq \alpha$), et il ne reste que la possibilité $N_\rho(\alpha) = \beta$. De même (ou par imparité de N_ρ), $N_\rho(\beta) = \alpha$.

h Le réel strictement négatif α vérifie donc

$$\frac{2\alpha^3}{3\alpha^2 - 1} = -\alpha$$

i.e. $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, puis $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Partie C – la méthode de Newton pour $x \mapsto x^2+1$ conduit au chaos

C.1 N_σ est définie pour tout réel x non nul, et

$$N_\sigma(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite de Newton soit bien définie. Cette suite est nécessairement divergente, puisque pour tout réel x, $N_\sigma - \mathrm{Id}$ n'est pas de limite nulle en x. De plus, comme $x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{x_n}$, on a $x_{n+1} < x_n$ (resp. $x_{n+1} > x_n$) si $x_n > 0$ (resp. $x_n < 0$). Si par exemple la suite (x_n) tendait vers $+\infty$ (l'autre cas est semblable), alors elle serait positive à partir d'un certain rang, donc décroissante à partir d'un certain rang, ce qui est absurde : la suite de Newton (x_n) est divergente de seconde espèce.

C.2 Si $z = e^{i\theta} = e^{i\theta'} \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ pour deux réels θ et θ', non multiples entiers de 2π, alors $\operatorname{cotan}(\frac{\theta}{2})$, $\operatorname{cotan}(\frac{\theta'}{2})$ existent et sont égaux. En effet, θ et θ' diffèrent d'un multiple entier de 2π, et la fonction cotangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et π-périodique. Cette définition est donc licite.

La fonction cotangente définit une bijection de $]0,\pi[$ sur $\mathbb{R}$, et tout nombre complexe de module 1, différent de 1, admet un unique argument dans l'intervalle $]0,2\pi[$: la fonction Φ définit donc une bijection de $\mathbb{U} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1,1\}$. Les réels $N_\sigma(\Phi(z))$ et $\Phi(D(z))$ sont bien définis, et la formule demandée résulte de

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \operatorname{cotan}(\theta) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotan}(\frac{\theta}{2}) - \frac{1}{\operatorname{cotan}(\frac{\theta)}{2}}\right)$$

Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. La suite $\omega = (\Phi(D^{\circ n}(z)))$ a pour terme inital $\Phi(z)$, et si son terme de rang n est bien défini et non nul, alors $D^{\circ n}(z) \notin \{-1,1\}$ et, d'après la question précédente,

$$N_\sigma(\omega_n) = N_\sigma(\Phi(D^{\circ n}(z)) = \Phi(D(D^{\circ n}(z))) = \Phi(D^{\circ(n+1)}(z)) = \omega_{n+1},$$

donc cette suite est d'itératrice N_σ.

La suite $(\Phi(D^{\circ n}(z)))$ est donc bien la suite de Newton associée à $\Phi(z)$.

Supposons désormais z périodique pour D : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z = D^{\circ n}(z)$. En appliquant Φ, il vient, grâce à ce qui précède

$$\Phi(z) = \Phi(D^{\circ n}(z)) = N_\sigma^{\circ n}(\Phi(z)),$$

donc $\Phi(z)$ est périodique pour N_σ.

C.3

a Soit $(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, et soit $z = e^{i\frac{2\pi k}{2^n-1}}$. On a alors

$$D^{\circ n}(z) = z^{2^n} = e^{i\frac{2\pi k}{2^n-1}2^n} = e^{i\frac{2\pi k}{2^n-1}(2^n-1+1)} = e^{2ik\pi}e^{i\frac{2\pi k}{2^n-1}} = z$$

et z est périodique pour D

b Soit $x, y \in]0,1[$, où $x < y$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2^n-1} < y - x$. Il existe un entier $k \in [\![1, 2^n-2]\!]$ tel que $x \leqslant \frac{k}{2^n-1} \leqslant y$. Ainsi, $\{\frac{\pi k}{2^n-1}, n \in \mathbb{N}^* \wedge k \in [\![1,2^n-2]\!]\}$ est dense dans $]0,\pi[$, donc, par continuité de la fonction cotangente, $\Omega = \{\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi k}{2^n-1}\right), n \in \mathbb{N}^* \wedge k \in [\![1,2^n-2]\!]\}$ est dense dans $\operatorname{cotan}(]0,\pi[) = \mathbb{R}$. Or, d'après les questions précédentes, Ω contient l'ensemble des points périodiques pour N_σ : ce dernier ensemble est donc lui-même dense dans $\mathbb{R}$.

C.4 Comme $(e^{i\theta})^2 = e^{i(2\theta)}$, on a par récurrence la relation $D^{\circ n}(e^{i]\alpha,\beta[}) = e^{i]2^n\alpha,2^n\beta[}$ (pour tout entier naturel n). Or $\beta - \alpha > 0$, et il existe donc un entier naturel n pour lequel $2^n(\beta-\alpha) > 2\pi$. Pour un tel n, on a donc $D^{\circ n}(e^{i]\alpha,\beta[}) = \mathbb{U}$.