Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Minimum d'une somme de distances

I.1 Les arguments de z et de z' sont bien définis puisqu'ils sont non nuls. Notons θ et θ' des arguments respectifs de z et de z'.

Un argument de $\bar{z}z'$ est $\theta' - \theta$: $\bar{z}z'$ est un réel positif (non nul) si et seulement si $\theta' - \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, *i.e.* z et z' ont mêmes arguments.

I.2

a Cours.

b On montre aisément ce résultat par récurrence. C'est l'inégalité triangulaire au rang 2, et, si on le suppose vrai au rang n fixé, alors

$$|z_1 + \cdots + z_{n+1}| \leqslant |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|,$$

par hypothèse de récurrence et l'inégalité triangulaire.

Le résultat est donc bien établi.

c Le cas d'égalité se traite encore bien par récurrence : il est connu au rang 2, et, si on le suppose vrai à un rang n fixé, alors, en cas d'égalité au rang $n+1$, on d'après les inégalités de la question précédente, $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$, puis, par hypothèse de récurrence, $\bar{z}_i z_j \in \mathbb{R}_+$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Par symétrie des rôles joués par z_1, …, z_{n+1}, on a plus généralement $\bar{z}_i z_j \in \mathbb{R}_+$, pour tous $i, j \in [\![1, n+1]\!]$. La réciproque est claire.

I.3

a Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} S(z) &= \bar{a}_1(z_1 - z) + \cdots + \bar{a}_n(z_n - z) \\ &= \bar{a}_1 z_1 + \cdots + \bar{a}_n z_n - z(\bar{a}_1 + \cdots + \bar{a}_n) \\ &= \frac{\bar{z}_1}{|z_1|} z_1 + \cdots + \frac{\bar{z}_n}{|z_n|} z_n \\ &= |z_1| + \cdots + |z_n| \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout } z \in \mathbb{C}, \text{ on a } S(z) = |z_1| + \cdots + |z_n|.}$

b D'après l'inégalité triangulaire généralisée (question I.2.b), on a :

$$\begin{aligned} |z_1| + \cdots + |z_n| &= |\bar{a}_1(z_1 - z) + \cdots + \bar{a}_n(z_n - z)| \\ &\leqslant |\bar{a}_1||z_1 - z| + \cdots + |\bar{a}_n||z_n - z| \\ &= |z - z_1| + \cdots + |z - z_n|. \end{aligned}$$

c À la question précédente, l'inégalité est une égalité si et seulement si l'inégalité intermédiaire dans le calcul est une égalité, c'est-à-dire, en vertu de I.2.c, $\bar{a}_1(z_1 - z)$, …, $\bar{a}_n(z_n - z)$ ont mêmes arguments (ou nuls). Des nombres (non nuls) ayant mêmes arguments ont mêmes arguments que leur somme, or $\bar{a}_1(z_1 - z) + \cdots + \bar{a}_n(z_n - z) = S(z) \in \mathbb{R}_+^*$ admet 0 pour argument. On a donc égalité si et seulement si :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \bar{a}_k(z_k - z) \in \mathbb{R}_+.$$

I.4

a Notons, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{ON_i}}{ON_i}$.

Les questions précédentes montrent que, **dans le cas où** $\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_n = \overrightarrow{0}$, la fonction f atteint son minimum en O, et que de plus elle atteint son minimum en N si et seulement si N appartient à la demi-droite issue de M_k passant par O (c'est la condition $\bar{z}_k(z_k - z) \in \mathbb{R}_+$).

b L'ensemble cherché est donc réduit à O si les points $M_1, \ldots, M_n$ ne sont pas alignés, et c'est un segment (comprenant O) de la droite Δ comprenant ces points s'ils sont alignés.

I.5

a $z_1, \ldots, z_n$ sont les racines n-ièmes de l'unité. On a donc $a_i = z_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et $z_1 + \cdots + z_n = 0$ (voir un exercice du cours). On peut donc appliquer $\star$, qui fournit, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$n \leqslant |z_1 - z| + \cdots + |z_n - z|.$$

b En prenant $z = 1$, et en observant que $|z_k - 1| = 2|\sin(k\pi/n)| = 2\sin(k\pi/n)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (grâce à l'astuce de l'angle moitié et l'encadrement $0 \leqslant k\pi/n \leqslant \pi$), on obtient :

$$\frac{n}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

L'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leqslant n$$

est quant à elle évidente (la fonction sinus est majorée par 1) :

$$\boxed{\frac{n}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leqslant n.}$$

c On a, puisque $e^{i\pi/n} \neq 1$:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/n}\right) &= \left(\frac{1 - (e^{i\pi/n})^n}{1 - e^{i\pi/n}}\right) \\ &= \frac{e^{-i\pi/2n}}{-i\sin(\pi/2n)} \end{aligned}$$

d'où, en prenant les parties imaginaires :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \operatorname{cotan}(\pi/2n).$$

La question précédente permet d'écrire :

$$\boxed{\frac{1}{n} \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leqslant \frac{2}{n}.}$$