DM de MPSI2

Devoir non surveillé

Endomorphismes nilpotents de rang maximal (d'après E3A PSI 2007)

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice unité de cet espace sera notée I_n et la matrice nulle 0_n.

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{C}^n$.

Si v est un endomorphisme de E, on rappelle que :

– v^0 est l'endomorphisme unité (*i.e.* $v^0 = \mathrm{Id}_E$).

– $\forall m \in \mathbb{N}, \quad v^{m+1} = v \circ v^m$.

L'endomorphisme v sera dit *nilpotent* s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = 0$ (endomorphisme nul de E). On définit de même une matrice nilpotente.

On note J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux en position $(i, i+1)$, qui valent 1 ($i \in [\![1, n-1]\!]$).

Partie A – Quelques propriétés de J

A.1 Déterminer le rang de J.

A.2

a Déterminer J^k pour $k \in \mathbb{N}$.

b Vérifier que toutes les puissances de J – sauf celle d'exposant 0 – sont nilpotentes.

Partie B – Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de E.

B.1 Prouver que pour tous entiers naturels i et j, $\mathrm{Ker}(u^i) \subset \mathrm{Ker}(u^{i+j})$.

B.2 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\mathrm{Ker}(u^m))$. Prouver l'existence de

$$r = \inf\{m \in \mathbb{N}, t_m = t_{m+1}\}.$$

B.3 Montrer que :

a Pour tout entier naturel m, tel que $m < r$, $\mathrm{Ker}(u^m)$ est strictement inclus dans $\mathrm{Ker}(u^{m+1})$.

b $\mathrm{Ker}(u^r) = \mathrm{Ker}(u^{r+1})$.

c Pour tout entier $m \geqslant r$, $\mathrm{Ker}(u^m) = \mathrm{Ker}(u^{m+1})$.

Partie C – Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

Soit V une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$ et vérifiant $V^n = 0_n$. On note v l'endomorphisme de E canoniquement associé à V.

C.1 Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.

a Déterminer $\mathrm{Im}(w)$.

b Prouver que $\mathrm{Ker}(w) \subset \mathrm{Ker}(v^q)$.

c Vérifier alors que l'on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(v^{p+q})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(v^p)) + \dim(\mathrm{Ker}(v^q)).$$

d En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}(v^i)) \leqslant i$.

e Démontrer qu'en fait $\dim(\mathrm{Ker}(v^i)) = i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

C.2 Prouver alors que $v^{n-1} \neq 0$.

C.3 En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que

$$\mathcal{B}_1 = (v^{n-1}(e), \dots, v(e), e)$$

soit une base de E.

C.4 Écrire la matrice de v dans cette base.

C.5 Montrer que si u et v sont deux endomorphismes nilpotents de $\mathbb{C}^n$ de rang $n-1$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbb{C}^n$, alors $M_{\mathcal{B}}(u)$ et $M_{\mathcal{C}}(v)$ sont semblables.