

Corrigé de devoir non surveillé

Endomorphismes nilpotents de rang maximal (d'après E3A PSI 2007)

Partie A – Quelques propriétés de J

A.1 J étant échelonnée et comportant $n - 1$ lignes non nulles, elle est de rang $n - 1$.

A.2

a Si $k \leq n - 1$, J^k est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux en position $(i, i + k)$ qui valent 1. Si $k \geq n$, J^k est nulle. On peut montrer ce résultat par récurrence, ou plus simplement en considérant l'endomorphisme u de \mathbb{C}^n canoniquement associé à J : $u(e_1) = 0$, et $u(e_{i+1}) = e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

b $J^n = 0_n$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(J^k)^n = (J^n)^k = 0_n^k = 0_n$ (car $k \neq 0$).

Toutes les puissances de J – sauf celle d'exposant 0 – sont nilpotentes.

A.3 $\exp(J)$ est la matrice triangulaire supérieure dont le coefficient en position (i, j) vaut $1/(j - i)!$ si $j \geq i$.

Partie B – Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme

B.1 Si $x \in \text{Ker}(u^i)$, alors $u^i(x) = 0$ et donc, puisque $u^j(0) = 0$: $u^{i+j}(x) = 0$.
 $\text{Ker}(u^i) \subset \text{Ker}(u^{i+j})$.

B.2 L'ensemble $\{m \in \mathbb{N}, t_m = t_{m+1}\}$ est une partie de \mathbb{N} , non vide (car $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels majorée par n), et admet donc un plus petit élément. En particulier, r existe bien.

B.3 Remarquons que pour tout entier naturel m , $\text{Ker}(u^m)$ est inclus dans $\text{Ker}(u^{m+1})$.

a Par définition de r , on a, pour tout entier $m < r$, $t_m \neq t_{m+1}$: $\text{Ker}(u^m)$ est donc strictement inclus dans $\text{Ker}(u^{m+1})$.

b $\text{Ker}(u^r) = \text{Ker}(u^{r+1})$, car $\text{Ker}(u^r)$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Ker}(u^{r+1})$, de même dimension (finie).

c Montrons par récurrence que pour tout entier $m \geq r$, $\text{Ker}(u^m) = \text{Ker}(u^{m+1})$. L'amorçage au rang r a déjà été effectué, et si on suppose la formule vraie à un rang $m \geq r$ fixé, alors, pour tout $x \in \text{Ker}(u^{m+2})$, on a $u(x) \in \text{Ker}(u^{m+1}) = \text{Ker}(u^m)$, donc $x \in \text{Ker}(u^{m+1})$, puis $\text{Ker}(u^{m+2}) \subset \text{Ker}(u^{m+1})$. Comme l'inclusion réciproque est bien connue, l'hérédité est prouvée.

Partie C – Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$

C.1

a $\text{Im}(w) = v^q(\text{Im}(v^p)) = \text{Im}(v^{p+q})$.

b $\text{Ker}(w) = \text{Im}(v^p) \cap \text{Ker}(v^q) \subset \text{Ker}(v^q)$.

c Le théorème du rang appliqué à w donne

$$\text{rg}(v^p) = \text{rg}(w) + \dim(\text{Ker}(w)),$$

puis, compte tenu des questions précédentes

$$\text{rg}(v^p) \leq \text{rg}(v^{p+q}) + \dim(\text{Ker}(v^q)),$$

soit, en appliquant le théorème du rang à v^p et v^{p+q} :

$$\dim(\text{Ker}(v^{p+q})) \leq \dim(\text{Ker}(v^p)) + \dim(\text{Ker}(v^q)).$$

d D'après le théorème du rang appliqué à v , $\dim(\text{Ker}(v)) = 1$ (v est de rang $n - 1$), d'où, en prenant $q = 1$ dans la formule précédente :

$$\dim(\text{Ker}(v^{p+1})) \leq \dim(\text{Ker}(v^p)) + 1,$$

pour tout entier naturel p . Une récurrence immédiate sur i permet alors de montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\dim(\text{Ker}(v^i)) \leq i$.

e Comme $\dim(\text{Ker}(v^{n-1})) \leq n-1 < n = \dim(\text{Ker}(v^n))$ ($v^n = 0$), la suite finie d'entiers $(\dim(\text{Ker}(v^i)))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est strictement croissante (cf. B.3.a), de premier terme 1 et de dernier terme n , ce qui force $\dim(\text{Ker}(v^i)) = i$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

C.2 $\dim(\text{Ker}(v^{n-1})) = n-1 \neq n$, donc $v^{n-1} \neq 0$.

C.3 Il existe un vecteur e de E tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. On vérifie alors (comme on l'a fait déjà plusieurs fois en cours/TD/colle/DM/DS) que $\mathcal{B}_1 = (v^{n-1}(e), \dots, v(e), e)$ est une base de E .

C.4 La matrice de v dans cette base n'est autre que J .

C.5 u et v admettent dans des bases adaptées J pour représentation matricielle : $M_{\mathcal{B}}(u)$ et $M_{\mathcal{C}}(v)$ sont par conséquent semblables à J , et sont donc semblables.