# Devoir non surveillé

## Sur les nombres complexes

**1** *(Oral Mines MP 05)*
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$. Montrer que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.

**2** *(École de l'air 04)*
**a** Soit $p$ un entier naturel, et $\theta$ un réel non multiple entier de $2\pi$. On rappelle que par définition :

$$\sum_{k=-p}^{p} e^{ik\theta} = e^{i(-p)\theta} + e^{i(-p+1)\theta} + \cdots + e^{-2i\theta} + e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{i(p-1)\theta} + e^{ip\theta}$$

Montrer la formule suivante :

$$\sum_{k=-p}^{p} e^{ik\theta} = \frac{\sin\left(\left(p + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

**b** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\sum_{p=0}^{n} \left( \sum_{k=-p}^{p} e^{ik\theta} \right) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_{k,n}\, e^{ik\theta},$$

où $\alpha_{k,n} = n + 1 - |k|$.
**Indication :** on pourra procéder par récurrence.

**c** Montrer, pour tout entier naturel $n$, et tout réel $\theta$ non multiple entier de $2\pi$, la formule suivante :

$$\sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ik\theta} = \frac{1}{n+1} \left( \frac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)^2.$$