Corrigé de devoir non surveillé

Sur les nombres complexes

1 Commençons par nous ramener au cas où $x = 0$, en factorisant par e^{ix} :

$$e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = e^{ix}(1 + e^{i(y-x)} + e^{i(z-x)}) = 0.$$

Quitte à remplacer y et z par $y - x$ et $z - x$ respectivement (ce qui ne changera rien à la rédaction), on peut supposer $x = 0$.

On a dès lors $1 + e^{iy} + e^{iz} = 0$. En particulier, $\sin(y) = -\sin(z)$ donc e^{iy} et e^{iz} sont soit conjugués, soit opposés. Ce dernier cas conduirait à l'absurdité $1 = 0$, donc e^{iy} et e^{iz} sont conjugués. Il vient

$$1 + e^{iy} + e^{-iy} = 0,$$

soit, en multipliant par e^{iy} :

$$1 + e^{iy} + (e^{iy})^2 = 0.$$

Par conséquent, $e^{iy} \in \{j, j^2\}$, où $j = e^{2i\pi/3}$. Quitte à considérer e^{iz} plutôt que e^{iy}, on peut supposer que $e^{iy} = j$ (et donc $e^{iz} = j^2$).

Comme $1 + (e^{iy})^2 + (e^{iz})^2 = 1 + j^2 + j^4 = 1 + j^2 + j = 0$, on a bien $1 + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$, ou, en revenant au cas général, $\boxed{e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0.}$

2

a Soit p un entier naturel, et θ un réel non multiple entier de 2π.

$S = \sum\limits_{k=-p}^{p} e^{ik\theta} = e^{-ip\theta} \sum\limits_{k=0}^{2p} e^{ik\theta}$. Comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \neq 1$, et on peut écrire (à l'aide de la formule de Moivre) :

$$\begin{aligned} S &= e^{-ip\theta} \frac{e^{(2p+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{-ip\theta} \left(\frac{e^{\frac{2p+1}{2} i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \right) \left(\frac{e^{\frac{2p+1}{2} i\theta} - e^{-\frac{(2p+1)}{2} i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right) \\ &= \boxed{\frac{\sin\left(\left(p + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \end{aligned}$$

b Démontrons cette assertion par récurrence, en définissant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse $\mathcal{H}_n$:

$$(\mathcal{H}_n) : \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k=-p}^{p} e^{ik\theta} \right) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_{k,n} e^{ik\theta}, \text{ où } \alpha_{k,n} = n + 1 - |k| \quad (k \in [\![-n, n]\!])$$

Amorçage de la récurrence. Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k=-p}^{p} e^{ik\theta} \right) = \sum_{k=-0}^{0} e^{ik\theta} = 1e^{0.i\theta}$$

Or, par définition, $\alpha_{0,0} = 1$, et $\mathcal{H}_0$ est donc bien satisfaite.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}_n$, et déduisons-en $\mathcal{H}_{n+1}$:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n+1} \left(\sum_{k=-p}^{p} e^{ik\theta} \right) &= \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k=-p}^{p} e^{ik\theta} \right) + \sum_{k=-(n+1)}^{n+1} e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \alpha_{k,n} e^{ik\theta} + \sum_{k=-(n+1)}^{n+1} e^{ik\theta} \quad \text{(par hypothèse } \mathcal{H}_n) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} (\alpha_{k,n} + 1) e^{ik\theta} + e^{-i(n+1)\theta} + e^{i(n+1)\theta} \\ &= \sum_{k=-(n+1)}^{n+1} \alpha_{k,n+1} e^{ik\theta} \quad (\alpha_{-(n+1),n+1} = \alpha_{(n+1),n+1} = 1) \end{aligned}$$

L'hérédité est donc bien prouvée.

On en déduit que $\mathcal{H}_n$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qu'il fallait prouver.

c Soit n un entier naturel, et θ un réel non multiple entier de 2π.

Considérons la somme

$$S' = \sum_{p=0}^{n} e^{i(p+\frac{1}{2})\theta}$$

Comme $e^{i\theta} \neq 1$, on a :

$$S' = e^{i\frac{\theta}{2}} \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} e^{i\frac{n+1}{2}\theta}$$

En égalant les parties imaginaires, il vient :

$$\sum_{p=0}^{n} \sin\left((p+\frac{1}{2})\theta\right) = \frac{\left(\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\right)^2}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ik\theta} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_{k,n} e^{ik\theta} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k=-p}^{p} e^{ik\theta} \right) \qquad \text{(d'après } \mathbf{2}\text{)} \\
&= \frac{1}{(n+1)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sum_{p=0}^{n} \sin\left((p+\frac{1}{2})\theta\right) \qquad \text{(d'après } \mathbf{1}\text{)} \\
&= \boxed{\frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)^2.}
\end{aligned}$$