Devoir non surveillé

Groupe infini dont les éléments sont d'ordre fini

On dit d'un groupe $(G, \cdot)$ qu'il est *d'ordre fini* (ou *fini*) si l'ensemble G est fini. Dans ce cas, le cardinal de G est également appelé l'*ordre* de $(G, \cdot)$ (ou de G).

Si $(G, \cdot)$ est un groupe d'élément neutre e, et g un élément de G, on dit que g est d'*ordre fini* s'il existe un entier naturel non nul n tel que $g^n = e$ (rappelons que $g^0 = e$, par convention).

1 Montrer que si $(G, \cdot)$ est un groupe d'ordre fini n, alors tout élément de G est d'ordre fini.
Indication : un élément g de G étant fixé, on pourra considérer l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_g : & [\![0, n]\!] & \to & G \\ & k & \mapsto & g^k \end{array}$$

2 Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité.

a Soit

$$\Omega = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n = 1\}.$$

Montrer :

1. Ω admet un élément neutre pour la multiplication.
2. $\forall z \in \Omega, \quad z^{-1} \in \Omega.$
3. $\forall z, z' \in \Omega, \quad zz' \in \Omega$

Comme $\mathbb{U}$ est un groupe contenant Ω, on en déduit que $(\Omega, \cdot)$ est un groupe.

b Montrer que le groupe Ω n'est pas d'ordre fini, mais que tous ses éléments sont d'ordre fini.