Corrigé de devoir non surveillé

Groupe infini dont les éléments sont d'ordre fini

1 Soit g un élément quelconque de G. L'application φ_g (définie dans l'énoncé), allant d'un ensemble de cardinal $n+1$ vers un ensemble de cardinal n, ne peut être injective : il existe donc deux éléments i et j de $[\![0,n]\!]$, avec $i<j$, tels que $\varphi_g(i)=\varphi_g(j)$. On a donc $g^{j-i}=e$ et g est d'ordre fini.

Tout élément de G est donc d'ordre fini.

2

a

1. 1 est clairement élément neutre pour la multiplication de Ω.
2. Soit z un élément quelconque de Ω : z est donc élément de $\mathbb{U}_n$, pour un certain entier n. Comme $\mathbb{U}_n$ est un groupe, $z^{-1}\in\mathbb{U}_n\subset\Omega$.
3. Soit z et z' deux éléments quelconques de Ω : il existe donc des entiers m et n tels que $z\in\mathbb{U}_m$ et $z'\in\mathbb{U}_n$. On a alors clairement $zz'\in\mathbb{U}_{mn}\subset\Omega$

b Chaque élément de Ω appartient à l'un des groupes finis $\mathbb{U}_n$ (pour un certain entier naturel non nul n), donc est d'ordre fini. Cependant, Ω n'est pas un ensemble fini, puisque par exemple sa partie

$$\{e^{\frac{i\pi}{n}}, n\in\mathbb{N}^*\}$$

est infinie (car la restriction de l'application cosinus à $[0,\pi]$ est injective).