Devoir non surveillé

Exercice 1 : Partition du disque unité en parties isométriques

Dans cet exercice, on identifie l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes au plan euclidien $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle *isométrie du plan* une bijection φ de $\mathcal{P}$ dans lui-même, conservant les distances, *i.e.* telle que :

$$\forall\, M, M' \in \mathcal{P}, \varphi(M)\varphi(M') = MM'$$

On note $\mathcal{I}$ leur ensemble.

On considère le disque unité fermé $\overline{D} = \{x \in \mathbb{C}, |x| \leqslant 1\}$. Nous allons démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas deux parties A et B de $\overline{D}$ telles que :

1. $\overline{D} = A \cup B$;
2. $A \cap B = \emptyset$;
3. $\exists \tau \in \mathcal{I}, \tau(A) = B$;
4. $O \in A$.

On suppose donc qu'il existe deux telles parties A et B de $\overline{D}$ (et une telle isométrie τ).

1 Montrer que τ^{-1} est une isométrie.

2 Montrer que si deux points x et y de $\overline{D}$ vérifient $|x - y| = 2$, alors leur milieu est O.

3 Montrer que pour $w \in \overline{D}$, la condition $|w - \tau(0)| > 1$ entraîne $w \in A$ (on pourra raisonner par contraposition).

4 En déduire l'existence d'un diamètre $[u, v]$ de $\overline{D}$ à extrémités u, v dans A.

5 Relever une contradiction.