Devoir non surveillé

Problème – Une équation de Pell-Fermat

Dans ce problème, le plan euclidien est identifié à $\mathbb{R}^2$ par choix d'un repère orthonormal $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$ désigne la conique d'équation $x^2 - 5y^2 = 1$ dans $\mathcal{R}$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble $\mathcal{H} \cap \mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs tels que $x^2 - 5y^2 = 1$.

Partie A – Généralités sur $\mathcal{H}$

A.1 Donner (sans preuve) des équations des asymptotes de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{R}$.

A.2 Donner le demi-axe transverse, le demi-axe non transverse, et l'excentricité de $\mathcal{H}$. Quel type de conique est $\mathcal{H}$?

A.3

a Montrer que l'arc paramétré $f\ : t \mapsto \left(\mathrm{ch}(t), \dfrac{sh(t)}{\sqrt{5}}\right)$ admet pour support l'une des branches de $\mathcal{H}$. On notera cette branche $\mathcal{H}_0$. Pour tout réel t, on notera $M(t)$ le point de l'arc f de paramètre t.

b Soit t un réel. Comment peut-on déduire $M(-t)$ de $M(t)$?

c Donner les coordonnées du sommet Ω de $\mathcal{H}$ situé sur $\mathcal{H}_0$.

A.4 Tracer $\mathcal{H}$ et ses asymptotes, en mettant en évidence $\mathcal{H}_0$.

Partie B – Loi de groupe sur $\mathcal{H}_0$

Étant donné deux points A et B de $\mathcal{H}_0$, on note Δ
- la droite (AB) si $A \neq B$,
- la tangente à $\mathcal{H}_0$ en A si $A = B$.

Si Δ est perpendiculaire à l'axe focal de $\mathcal{H}$, on pose $A * B = \Omega$. Sinon, la parallèle à Δ passant par Ω croise $\mathcal{H}_0$ en Ω et en un autre point C, et on pose $A * B = C$.

B.1 Montrer que pour tous réels distincts et non opposés t et t',

$$\frac{\mathrm{sh}(t') - \mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t') - \mathrm{ch}(t)} = \frac{\mathrm{sh}\,(t+t')}{\mathrm{ch}\,(t+t') - 1}.$$

B.2 Établir que pour tous réels t et t', $M(t) * M(t') = M(t + t')$.

B.3 Montrer que $(\mathcal{H}_0, *)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire :
- $*$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{H}_0$ (*i.e.* une application de $\mathcal{H}_0^2$ dans $\mathcal{H}_0$).
- $*$ est commutative et associative, *i.e.* pour tous points A, B, C de $\mathcal{H}_0$, $A * B = B * A$ et $A * (B * C) = (A * B) * C$.
- $\mathcal{H}_0$ admet un élément neutre H, *i.e.* tel que $H * A = A * H = A$, pour tout $A \in \mathcal{H}_0$.
- Tout élément A de $\mathcal{H}_0$ admet un symétrique, *i.e.* il existe $B \in \mathcal{H}_0$ tel que $A * B = B * A = H$.

Partie C – Résolution d'une équation de Pell-Fermat

Soit A le point de coordonnées $(9, 4)$.

C.1 Montrer que A est un point de $\mathcal{H}_0$. Soit t_0 son paramètre (vu comme point de l'arc f). Calculer e^{t_0} et e^{-t_0}.

C.2 Montrer que l'application $F\ : M \mapsto A * M$ de $\mathcal{H}_0$ dans elle-même envoie le point de coordonnées (x, y) sur le point de coordonnées $(9x + 20y, 4x + 9y)$.

On définit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $A_0 = \Omega$ et la relation de récurrence $A_{n+1} = F(A_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C.3 Montrer que cette suite est bien définie, et que c'est une suite de points de $\mathcal{S}$.

C.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que A_n est de coordonnées

$$\left(\frac{1}{2}\left((9+4\sqrt{5})^n + (9-4\sqrt{5})^n\right), \frac{1}{2\sqrt{5}}\left((9+4\sqrt{5})^n - (9-4\sqrt{5})^n\right)\right)$$

.

C.5 ♡ Montrer que si B est un point de $\mathcal{S}$ à coordonnées positives ou nulles, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B = A_n$.

Indication : si $B = M(t) \in \mathcal{S}$, vérifier que nécessairement $M(t - E(t/t_0)t_0)$ est un point de $\mathcal{S}$, d'ordonnée dans $[0, 3[$. En déduire que $M(t) = A_{E(t/t_0)}$ (E désigne la fonction partie entière).

C.6 Décrire $\mathcal{S}$.