Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Une équation de Pell-Fermat

Partie A – Généralités sur $\mathcal{H}$

A.1 Des équations des asymptotes sont $x - \sqrt{5}y = 0$ et $x + \sqrt{5}y = 0$.

A.2 Le demi-axe transverse de $\mathcal{H}$ vaut 1, son demi-axe non transverse vaut $1/\sqrt{5}$, et son excentricité vaut $\sqrt{6/5}$. $\mathcal{H}$ est évidemment une hyperbole.

A.3

a C'est un cas particulier d'une proposition du cours.

b Avec des notation évidentes, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, donc $M(-t)$ se déduit de $M(t)$ par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

c Les coordonnées de Ω sont $(1, 0)$.

A.4 Sans difficulté.

Partie B – Loi de groupe sur $\mathcal{H}_0$

B.1 Rappelons que pour tous réels u et v,

$$\operatorname{sh}(u+v) = \operatorname{sh}(u)\operatorname{ch}(v) + \operatorname{sh}(v)\operatorname{ch}(u) \text{ et } \operatorname{ch}(u+v) = \operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{sh}(v).$$

En prenant $u = (t + t')/2$ et $v = (t' - t)/2$, il s'agit de montrer que les réels

$$\frac{\operatorname{sh}(u+v) - \operatorname{sh}(u-v)}{\operatorname{ch}(u+v) - \operatorname{ch}(u-v)} \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{sh}(2u)}{\operatorname{ch}(2u) - 1}$$

sont égaux.

Les formules rappelées permettent aisément de montrer que chacun de ces réels vaut $1/\operatorname{th}(u)$.

Ainsi, pour tous réels distincts et non opposés t et t',

$$\frac{\operatorname{sh}(t') - \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t') - \operatorname{ch}(t)} = \frac{\operatorname{sh}(t+t')}{\operatorname{ch}(t+t') - 1}.$$

B.2 Si t et t' sont des réels distincts et non opposés, alors la question précédente montre que les droites $(M(t)M(t'))$ et $(\Omega M(t+t'))$ ont même pente, donc $M(t) * M(t') = M(t+t')$.

Si t et t' sont opposés et non nuls, $(M(t)M(t'))$ est perpendiculaire à l'axe focal, donc $M(t) * M(t') = \Omega = M(0) = M(t+t')$.

Si t et t' sont nuls, alors la formule est claire (car $\Omega * \Omega = \Omega$).

Si t et t' sont égaux non nuls, alors, l'arc f étant régulier, la pente de la tangente à $\mathcal{H}_0$ en $M(t)$ vaut

$$\frac{\operatorname{ch}(t)}{\sqrt{5}\operatorname{sh}(t)} = \frac{1}{\sqrt{5}\operatorname{th}(t)},$$

celle de $(\Omega M(2t))$ vaut

$$\frac{\operatorname{sh}(2t)}{\sqrt{5}(\operatorname{ch}(2t) - 1)} = \frac{1}{\sqrt{5}\operatorname{th}(t)}.$$

On a donc bien $M(t) * M(t) = M(2t)$.

Dans tous les cas, on a $M(t) * M(t') = M(t+t')$.

B.3 Ce qui précède (notamment la question précédente) montre que

– $*$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{H}_0$.

– $*$ est commutative et associative, car pour tous réels t, t', t'' :

$$M(t) * M(t') = M(t+t') = M(t'+t) = M(t') * M(t),$$

et

$$M(t)*(M(t')*M(t'')) = M(t)*M(t'+t'') = M(t+(t'+t'')) = M((t+t')+t'') = (M(t)*M(t'))*M(t'').$$

– $\mathcal{H}_0$ admet $M(0) = \Omega$ pour élément neutre.
– Pour tout réel t, $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ pour $*$.
Ainsi, $(\mathcal{H}_0, *)$ est un groupe commutatif.

Partie C – Résolution d'une équation de Pell-Fermat

C.1 $9^2 - 5(4)^2 = 1$, donc $A \in \mathcal{H}_0$. On a $\mathrm{ch}(t_0) = 9$, $\mathrm{sh}(t_0) = 4\sqrt{5}$, donc $e^{t_0} = \mathrm{ch}(t_0) + \mathrm{sh}(t_0) = 9 + 4\sqrt{5}$ et $e^{-t_0} = 9 - 4\sqrt{5}$.

C.2 Soit t un réel, $M(t) = (\mathrm{ch}(t), \mathrm{sh}(t)/\sqrt{5}) = (x, y)$. $F(M(t))$ est le point de paramètre $t + t_0$, donc de coordonnées

$$\left(\mathrm{ch}(t+t_0), \frac{\mathrm{sh}(t+t_0)}{\sqrt{5}}\right) = \left(9\,\mathrm{ch}(t) + 4\sqrt{5}\,\mathrm{sh}(t), \frac{1}{\sqrt{5}}(4\sqrt{5}\,\mathrm{ch}(t) + 9\,\mathrm{sh}(t))\right) = (9x + 20y, 4x + 9y).$$

C.3 L'ensemble $\mathcal{H}_0$ est stable par F, et comprend A_0, donc la suite est bien définie. La question précédente montre plus précisément que $\mathcal{S}_0 = \mathcal{H}_0 \cap \mathbb{Z}^2$ est stable par F. Comme $A_0 \in \mathcal{S}_0$, on en déduit que (A_n) est une suite de points de $\mathcal{S}_0$, donc de $\mathcal{S}$.

C.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Le point A_n est de paramètre nt_0, donc de coordonnées $\left(\mathrm{ch}(nt_0), \mathrm{sh}(nt_0)/\sqrt{5}\right)$. Comme

$$\mathrm{ch}(nt_0) = \frac{(e^{t_0})^n + (e^{-t_0})^n}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(nt_0) = \frac{(e^{t_0})^n - (e^{-t_0})^n}{2},$$

on en déduit que A_n est le point de coordonnées

$$\left(\frac{1}{2}\left((9+4\sqrt{5})^n + (9-4\sqrt{5})^n\right), \frac{1}{2\sqrt{5}}\left((9+4\sqrt{5})^n - (9-4\sqrt{5})^n\right)\right).$$

C.5 B est situé sur $\mathcal{H}_0$, et à ordonnée positive : son paramètre t est donc positif ou nul. $t/t_0 - E(t/t_0) \in [0, 1[$, donc $t' = t - E(t/t_0)t_0 \in [0, t_0[$. En particulier, $M(t')$ est d'ordonnée dans $[0, 3[$.

Or $M(t') \in \mathcal{S}$: en effet, F est bijective, et sa bijection réciproque, à savoir $M \mapsto M(-t_0)*M$, envoie un point à coordonnées entières sur un point à coordonnées entières (pour le voir, expliciter F^{-1}, ou faire des calculs analogues à C.2). Comme $M(t')$ s'obtient en appliquant $E(t/t_0)$ fois F^{-1} à $B \in \mathcal{S}$, on a bien $M(t') \in \mathcal{S}$. On constate aisément que $M(t')$ ne peut être d'ordonnée 1, 2 ou 3 (car l'abscisse de $M(t')$ est entière) : ce point est d'ordonnée nulle et appartient à $\mathcal{H}_0$: c'est Ω.

Il s'ensuit que B est le point A_n, où $n = E(t/t_0) \in \mathbb{N}$.

Si B est un point de $\mathcal{S}$ à coordonnées positives ou nulles, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B = A_n$.

C.6 Un point (x, y) du plan appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $(|x|, |y|) \in \mathcal{S}$. Par conséquent, d'après les trois questions précédentes :

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\pm\frac{1}{2}\left((9+4\sqrt{5})^n + (9-4\sqrt{5})^n\right), \pm\frac{1}{2\sqrt{5}}\left((9+4\sqrt{5})^n - (9-4\sqrt{5})^n\right)\right),\ n \in \mathbb{N})\right\}.$$