Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Points communs à certaines coniques

Partie A – Cercle inclus dans une conique

A.1 En évaluant en 0 la relation $(*)$, on obtient

$$\alpha + \gamma + \varepsilon = 0.$$

En l'évaluant en π, il vient

$$\alpha - \gamma + \varepsilon = 0,$$

donc $\gamma = 0$ et $\alpha + \varepsilon = 0$.

En dérivant deux fois $(*)$, puis en évaluant en 0, il vient $\alpha = 0$, puis $\varepsilon = 0$.

En évaluant $(*)$ en $\pi/2$, on obtient $\delta = 0$, puis, en l'évaluant en $\pi/4$ par exemple, $\beta = 0$.

Tous les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont bien nuls.

A.2 Le cercle en question, de centre (x_0, y_0), est le support de l'arc $\theta \mapsto (x_0 + \rho\cos(\theta), y_0 + \rho\sin(\theta))$. On a par hypothèse, pour tout réel θ :

$$A(x_0+\rho\cos(\theta))^2+B(x_0+\rho\cos(\theta))(y_0+\rho\sin(\theta))+C(y_0+\rho\sin(\theta))^2+D(x_0+\rho\cos(\theta))+E(y_0+\rho\sin(\theta))+F = 0,$$

ce qui conduit, en se rappelant que $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$ et $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, à

$$\rho^2\frac{A-C}{2}\cos(2\theta) + \rho^2\frac{B}{2}\sin(2\theta) + \gamma\cos(\theta) + \delta\sin(\theta) + \varepsilon = 0,$$

pour certaines constantes γ, δ et ε qu'il est inutile de préciser.

D'après la question précédente, on en déduit bien que $A = C$ et $B = 0$.

Réciproquement, on remarque

$$A(X^2+Y^2) + DX + EY + F = A(X + D/(2A))^2 + B(Y + E/(2A))^2 + F - \frac{D^2+E^2}{4A},$$

donc $\mathcal{C}_{(A,0,A,D,E,F)}$ est un cercle de rayon non nul si et seulement si $D^2 + E^2 > 4AF$.

Partie B – Points communs aux éléments de $\mathcal{E}_1$

B.1 D'après la question A.2, si un élément $\mathcal{C}_{(A,B,A,D,0,0)}$ de $\mathcal{E}_1$ est un cercle, alors $B = 0$, et, puisque $M_0 \in \mathcal{C}$:

$$A(x_0^2 + y_0^2) + Dx_0 = 0,$$

donc (A, D) est colinéaire à $(x_0, -(x_0^2+y_0^2))$, puis, quitte à multiplier par la bonne constante non nulle, $\mathcal{C}$ a bien pour équation

$$x_0(X^2+Y^2) - (x_0^2+y_0^2)X = 0.$$

Réciproquement, cette équation définit bien un cercle (toujours grâce à A.2).

Ce cercle a pour intersection avec l'axe (OY) (d'équation $X = 0$) le singleton $\{O\}$, il est donc tangent à cet axe.

Son centre se trouve donc sur l'axe des abscisses, ainsi que sur la médiatrice de $[OM_0]$, ce qui le détermine géométriquement.

B.2 Un élément de $\mathcal{E}_1$ a une équation de la forme $BXY + DX = 0$ si et seulement si $Bx_0y_0 + Dx_0 = 0$, soit encore $By_0 + D = 0$ ($x_0 \neq 0$ car $M_0 \notin (OY)$), *i.e.* (B, C) est colinéaire à $(1, -y_0)$, donc un seul élément de $\mathcal{E}_1$

a une équation de cette forme, et il est d'équation $XY - y_0X = 0$. Cet élément est réunion de (OY) et de la droite horizontale d'équation $Y = y_0$ (*i.e.* celle passant par M_0).

B.3 $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est constitué des points O, M_0 et $M_1 = \left(\frac{y_0^2}{x_0}, y_0\right)$. Cette intersection est donc constituée de trois points, sauf si $y_0 = 0$ (qui conduit à $O = M_1$) ou $|x_0| = |y_0|$ (qui conduit à $M_0 = M_1$), où elle est alors constituée de deux points (elle a au moins deux points, car O et M_0 sont distincts).

Un point commun à tous les éléments de $\mathcal{E}_1$ est bien sûr commun à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. La réciproque est vraie, car tout élément de $\mathcal{E}_1$ a pour équation une combinaison linéaire des équations de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

L'ensemble des points communs à tous les éléments de $\mathcal{E}_1$ est donc $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Partie C – Une transformation du plan

C.1 Soit M un point de P', de coordonnées polaires (ρ, θ). En particulier, $M \neq O$, de sorte que les systèmes de coordonnées polaires de M sont les couples de la forme $(\rho, \theta + 2k\pi)$ et $(-\rho, \theta + (2k+1)\pi)$, où k décrit $\mathbb{Z}$.

Dans le premier cas, on a $\rho \tan(\theta + 2k\pi) = \rho \tan\theta$ et $\frac{\pi}{2} - (\theta + 2k\pi) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta\ [2\pi]$.

Dans le second cas, on a $-\rho \tan(\theta + (2k+1)\pi) = -\rho \tan\theta$ et $\frac{\pi}{2} - (\theta + (2k+1)\pi) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta + \pi\ [2\pi]$.

Cette définition de $\varphi(M)$ est donc bien cohérente.

C.2 Notons (ρ, θ) un système de coordonnées polaires de M_0. On a $\rho \tan(\theta) \cos(\pi/2 - \theta) = \rho \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y_0^2}{x_0}$ et $\rho \tan(\theta) \sin(\pi/2 - \theta) = y_0$, donc $\varphi(M_0)$ est le point $(y_0^2/x_0, y_0)$, qui est bien situé sur tout élément de $\mathcal{E}_1$ d'après B.3.

C.3 Un point de coordonnées polaires (ρ', θ') appartient à (OY) si et seulement si $\rho' = 0$ ou $\theta' \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Ainsi, pour $M \in P'$, on a $\varphi(M) \in P'$ si et seulement si $M \notin (OX)$.

Dans ce cas, $\varphi \circ \varphi(M)$ est bien défini, et, en notant (ρ, θ) un système de coordonnées polaires de M, alors $\varphi \circ \varphi(M)$ est de coordonnées polaires

$$\left(\rho \tan(\theta) \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = (\rho, \theta),$$

de sorte que $\varphi \circ \varphi(M) = M$.

C.4

a γ est le cercle de diamètre $[OA]$, où A est de coordonnées cartésiennes $(0, 2a)$.

Soit $(2a\sin(\theta), \theta)$ un système de coordonnées polaires d'un point M de γ. $\varphi(M)$ est de coordonnées polaires

$$\left(2a\sin(\theta)\tan(\theta), \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \left(2a\frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}, \frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

donc γ' a pour équation polaire $\rho = 2a\frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}$ (pour tout réel θ, $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$ et $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$).

b La fonction $r\ : \theta \mapsto 2a\frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}$ est défini sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, et π-antipériodique : on peut l'étudier sur $]0, \pi[$ (on aura déjà tout le support). On observe en outre que $r(\pi - \theta) = r(\theta)$ pour tout $\theta \in]0, \pi[$: on peut donc étudier l'arc sur $]0, \pi/2]$ (on adjoindra au support obtenu son symétrique par rapport à (OY) pour obtenir tout le support).

r est positive sur ce domaine.

La courbe présente au voisinage de 0 une asymptote d'équation $Y = 2a$, et la courbe est localement (et même globalement) en dessous de son asymptote.

Le seul point physique éventuellement stationnaire est le pôle, que l'on atteint en $\pi/2$. Or $r'(\pi/2) = 0$, donc le point de paramètre $\pi/2$ est bien stationnaire.

Partie D – Centres de coniques de $\mathcal{E}_1$ sur une conique

D.1

a Soit ν un réel. L'équation

$$\lambda(X^2 + Y^2) + 2\mu XY + \nu X = 0$$

définit un élément $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}_1$ si et seulement si $M_0 \in \mathcal{C}$ (les autres conditions étant clairement vérifiées). Comme $x_0 \neq 0$, l'unique valeur de ν convenable est :

$$\nu = -\frac{\lambda(x_0^2 + y_0^2) + 2\mu x_0 y_0}{x_0}.$$

b On sait qu'un point $\Omega(x,y)$ est centre de $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} 2\lambda x + 2\mu y + \nu \quad = \quad 0 \\ 2\mu x + 2\lambda y = 0 \end{array}\right.$$

Comme le déterminant de ce système (d'inconnues x et y) est non nul, il admet une unique solution, qui est donc l'unique centre de symétrie de cette conique.

Après calcul, on trouve

$$\Omega_{\lambda,\mu} = \left(-\frac{\lambda\nu}{2(\lambda^2-\mu^2)}, \frac{\mu\nu}{2(\lambda^2-\mu^2)}\right).$$

D.2

a Pour $(X,Y) = \left(-\frac{\lambda\nu}{2(\lambda^2-\mu^2)}, \frac{\mu\nu}{2(\lambda^2-\mu^2)}\right)$, on a :

$$X^2 - Y^2 = \frac{\nu^2}{4(\lambda^2-\mu^2)},$$

et

$$\frac{x_0^2+y_0^2}{2x_0}X - y_0 Y = \frac{-\frac{x_0^2+y_0^2}{2}\lambda - y_0\mu}{2(\lambda^2-\mu^2)}\nu = \frac{\nu^2}{4(\lambda^2-\mu^2)},$$

donc $\Omega_{\lambda,\mu} \in \Gamma$.

b Γ est clairement une hyperbole équilatère (donc d'excentricité $\sqrt{2}$), de centre $\left(\frac{x_0^2+y_0^2}{4x_0}, \frac{y_0}{2}\right)$. Son axe non focal est d'équation $X = \frac{x_0^2+y_0^2}{4x_0}$, son axe focal estr d'équation $Y = \frac{y_0}{2}$, donc ses sommets sont $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$ et $\left(\frac{y_0^2}{2x_0}, \frac{y_0}{2}\right)$.