Corrigé de devoir non surveillé

Points cosphériques

Tout d'abord, à partir des relations $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, on obtient

$$AA' = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}} \text{ et } \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$$

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ étant aigu, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} > 0$, et donc $AA' > \frac{BC}{2}$. Cela prouve que l'intersection des sphères de diamètres $[BC]$ et $[AA']$ est bien un cercle $\mathcal{C}_A$. De même pour les deux autres cercles dont il est question, par symétrie des rôles joués par A, B et C.
Remarquons par ailleurs -ce sera utile pour la suite- que

$$AA'^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}\right)$$

ce qui, après simplifications ($\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{A'C} = -\frac{1}{2}BC^2$), donne

$$AA'^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2$$

Soit M un point de $\mathcal{C}_A$. On a donc $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = 0$ et $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'} = 0$. Comme A' est le centre de la sphère de diamètre $[BC]$, on a $MA' = \frac{1}{2}BC$. De plus, on a

$$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA'})\cdot\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA'}\cdot\overrightarrow{MA'} = \frac{1}{4}BC^2$$

On a donc

$$\begin{aligned}
MG^2 &= (\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}))^2 = \frac{1}{9}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA'})^2 = \frac{1}{9}(3\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A})^2 \\
&= MA'^2 + \frac{2}{3}\overrightarrow{MA'}\cdot\overrightarrow{A'A} + \frac{1}{9}A'A^2 \\
&= \frac{1}{4}BC^2 - \frac{2}{3}\frac{1}{4}BC^2 + \frac{1}{9}AA'^2 = \frac{1}{12}BC^2 + \frac{1}{9}A'A^2 \\
&= \frac{1}{18}\left(AB^2 + BC^2 + AC^2\right)
\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles joués par A, B et C, et comme l'expression précédente est inchangée si on permute A, B, C, on déduit que les points de $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ sont à égales distance ($\sqrt{\frac{1}{18}\left(AB^2 + BC^2 + AC^2\right)}$) de G, et sont donc situés sur une même sphère de centre G.