Corrigé de devoir non surveillé

Exercice 1 : Polynômes de Bernstein et approximation uniforme

1

a La formule du binôme donne $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$.

Pour $k \geqslant 1$, $k\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Donc $\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} = nx(x+1-x)^{n-1} = nx$.

Pour $k \geqslant 2$, $k(k-1)\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$.

Donc $\sum_{k=0}^n k(k-1)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2\sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2}(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2(x+1-x)^{n-2} = n(n-1)x^2$.

b $\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 = x^2 - 2x\frac{k}{n} + \frac{k^2-k}{n^2} + \frac{k}{n^2}$ donne avec la question précédente :

$$\sum_{k=0}^n \left(x-\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = x^2 - 2x^2 + \frac{n(n-1)x^2}{n^2} + \frac{x}{n} = \frac{x-x^2}{n}.$$

2

a $S_V(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\in V}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

b Pour $k \in W$ on a $\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right| > 1$ donc $\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right| < n\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$.

Par suite, $\sqrt{n}S_W(x) < n\sum_{k=0}^n \left(x-\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = x(1-x)$ par 1.b

D'où $S_W(x) \leqslant \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

c $f(x) = x(1-x)$ a un maximum égal à $\frac{1}{4}$ (obtenu pour $x = \frac{1}{2}$).

Donc $S_W(x) \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n}}$ et $S(x) = S_V(x) + S_W(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} = \frac{5}{4\sqrt{n}}$

3

a L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $|\sum_{k=0}^n a_k b_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^n b_k^2}$.

Pour $a_k = \left|x-\frac{k}{n}\right|\sqrt{\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}}$ et $b_k = \sqrt{\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}}$ on obtient :

$S(x) \leqslant \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$ (en utilisant 1).

De $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$ on déduit $S(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

4 Pour $f(x) = x^2$ on calcule en écrivant $k^2 = k(k-1)+k$ et en utilisant 1.b :

$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{1}{n^2}(n(n-1)x^2 + nx) = \frac{(n-1)x^2+x}{n}$.

Par suite, $B_n(f)(x) - x^2 = \frac{x(1-x)}{n}$ d'où $||B_n(f) - f||_\infty = \frac{1}{4n}$ puisque $0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, le maximum étant atteint pour $x = \frac{1}{2}$.

a Immédiat avec 1.b.

Comme f est de classe C^1, elle est δ-lipschitzienne sur $[0,1]$ par l'inégalité des accroissements finis (avec $\delta = ||f'||_\infty$).

Si f est δ-lipschitzienne, $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| \leqslant \delta|\frac{k}{n} - x|$ d'où $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \delta S(x) \leqslant \delta\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

C'est vérifié pour tout $x \in [0,1]$ donc $||B_n(f) - f||_\infty \leqslant \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$.