Corrigé de devoir non surveillé

Puissances

Exercice 1 : Calcul de limite

Nous sommes en présence d'une forme indéterminée du type $+\infty - \infty$. Nous allons voir que le second terme l'emporte sur le premier.

Pour tout réel strictement positif x, on a

$$\frac{(x^x)^x}{x^{(2^x)}} = \frac{\exp(x\ln(x^x))}{\exp(2^x\ln(x))} = \exp((x^2-2^x)\ln(x)) = \exp\left(-2^x\ln(x)\left(1-\frac{x^2}{2^x}\right)\right),$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^x)^x}{x^{(2^x)}} = 0$.

Enfin, en écrivant

$$(x^x)^x - x^{(2^x)} = -x^{(2^x)}\left(1-\frac{(x^x)^x}{x^{(2^x)}}\right),$$

pour tout $x>0$, on constate que la limite cherchée vaut $\boxed{-\infty.}$

Exercice 2 : $x^y = y^x$

1 La fonction f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et, pour tout $x>0$,

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

f est donc strictement croissante sur $]0,e]$, strictement décroissante sur $[e,+\infty[$.

2 Si $(x,y)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $x<y$, vérifie $x^y=y^x$, alors $y\ln(x)=x\ln(y)$, puis $f(x)=f(y)$. Les entiers x,y ne peuvent être tous deux supérieurs à e, car f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Ceci impose $x\in\{1,2\}$. On écarte vite la possibilité $x=1$, il ne reste plus qu'à étudier le cas où $x=2$. On remarque alors que $y=4$ convient ($4^2=2^4$). D'après la question précédente, aucun autre choix de y ne peut convenir.

$\boxed{\text{Les couples cherchés sont donc } (2,4) \text{ et } (4,2).}$