Devoir non surveillé

Racines p-ièmes réelles de I_n

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. On considère n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la matrice diagonale d'ordre n dont les termes diagonaux sont tous égaux à 1.

Le but de ce problème est l'étude des ensembles

$$\mathcal{R}_n(p) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^p = I_n\}.$$

Dans la deuxième et la troisième partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, et Id_E désigne l'identité de E.

Partie A – Généralités

A.1 $\mathcal{R}_n(p)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

A.2 Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $A^{-1} \in \mathcal{R}_n(p)$.

A.3 Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^{-1}AP \in \mathcal{R}_n(p)$.

A.4 Montrer que $\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est un ensemble fini dont on déterminera le cardinal.

A.5 On considère q un entier naturel supérieur ou égal à 2, et on appelle d le plus grand diviseur commun de p et q. Montrer que $\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q) = \mathcal{R}_n(d)$.

Partie B – Étude de $\mathcal{R}_2(2)$

B.1 Soit A un élément de $\mathcal{R}_2(2)$ tel que $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$, et soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

a Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = E$.

b En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que $ad - bc \neq 0$ et

$$A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad + bc & -2ab \\ 2cd & -ad - bc \end{pmatrix}.$$

B.2 Montrer que $\mathcal{R}_2(2)$ muni de la multiplication des matrices n'est pas un groupe. Interpréter géométriquement ce résultat.

Partie C – Étude de $\mathcal{R}_2(3)$

C.1 Dans toute la suite du problème, M désigne un élément de $\mathcal{R}_2(3)$, et v l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M. On considère les sous-espaces vectoriels de E (ici, $v^2 = v \circ v$) :

$$F = \mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}(v^2 + v + \mathrm{Id}_E).$$

a Montrer que $F \cap G = \{0\}$.

b Soit $x \in E$. Montrer que $\frac{1}{3}\left(x + v(x) + v^2(x)\right) \in F$ et que $\frac{1}{3}\left(2x - v(x) - v^2(x)\right) \in G$.

c En déduire que $E = F \oplus G$.

C.2 Que peut-on dire de M si F est de dimension 2 ?

C.3 Le but de cette question est de montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que F n'est pas de dimension 1. On suppose donc que F est de dimension 1.

a Montrer qu'il existe une base $\mathcal{G} = (g_1, g_2)$ de E telle que F soit la droite vectorielle engendrée par g_1 et G soit la droite vectorielle engendrée par g_2.

b En considérant le vecteur $v^2(g_2) + v(g_2) + g_2$, obtenir une contradiction.

C.4 On suppose dans cette question que F est de dimension 0.

a Montrer que $(e_1, v(e_1))$ est une base de E.

b En déduire qu'il existe un réel a et un réel non nul b tels que

$$M = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} ab & -1-a-a^2 \\ b^2 & -ab-b \end{pmatrix}.$$