Devoir non surveillé

Réduction et suites récurrentes linéaires

Partie A – Produit de matrices diagonales par blocs

Soit p, q des entiers naturels non nuls, $n = p + q$. On considère deux matrices carrées $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de taille n. On suppose que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & B_2 \end{pmatrix},$$

où A_1 et B_1 (resp. A_2 et B_2) sont des matrices carrées de taille p (resp. q).

A.1 Montrer que

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & A_2B_2 \end{pmatrix}$$

A.2 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} A_1^n & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & A_2^n \end{pmatrix}$$

A.3 Calculer $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie B – Calcul de puissances d'une matrice par changement de base

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

B.1 Soit $v_1 = (1, -3, 9)$, $v_2 = (1, 2, 4)$ et $v_3 = (0, 1, 4)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et calculer l'inverse de $P = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

B.2 Exprimer la matrice B de f dans $\mathcal{B}'$ en fonction de P et de A.

B.3 Calculer B.

B.4 En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie C – Application à une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par u_0, u_1, u_2, et la relation de récurrence :

$$u_{n+3} = u_{n+2} + 8u_{n+1} - 12u_n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C.1 Trouver une matrice C telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

C.2 En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n.