Corrigé de devoir non surveillé

Réduction et suites récurrentes linéaires

Partie A – Produit de matrices diagonales par blocs

A.1 On peut montrer ce résultat par le calcul, mais aussi en considérant les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^n$, respectivement canoniquement associés à A et à B. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On introduit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$, $E_1 = \text{Vect}(\mathcal{B}_1)$ et $E_2 = \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$. Bien sûr $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^n$. Clairement, les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont stables par u et v. on peut donc définir u_1 et v_1 (resp. u_2 et v_2) les endomorphismes de E_1 (resp. E_2) induits par u et v respectivement.

Clairement, $M_{\mathcal{B}_1}(u_1) = A_1$, $M_{\mathcal{B}_1}(v_1) = B_1$, $M_{\mathcal{B}_2}(u_2) = A_2$, $M_{\mathcal{B}_2}(v_2) = B_2$. Par conséquent, $M_{\mathcal{B}_1}(u_1v_1) = A_1B_1$ et $M_{\mathcal{B}_2}(u_2v_2) = A_2B_2$. Cela prouve :

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & A_2B_2 \end{pmatrix}.}$$

A.2 Par une récurrence immédiate, on en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} A_1^n & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & A_2^n \end{pmatrix}}$$

A.3 On peut appliquer le résultat précédent, pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.}$$

Remarque : pour calculer $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$, on peut :

1. trouver une formule et la montrer par récurrence.
2. utiliser la formule du binôme de Newton.
3. trouver le reste dans la division euclidienne de X^n par $(X-2)^2$.

Partie B – Calcul de puissances d'une matrice par changement de base

B.1 En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss pour le calcul d'inverse (par opérations sur les lignes par exemple), on constate que P est inversible, ce qui prouve que $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$, et fournit :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 21 & 4 & -1 \\ -30 & 5 & 5 \end{pmatrix}}$$

B.2 D'après le cours, $\boxed{B = P^{-1}AP.}$

B.3 Que ce soit à la main (« court-circuit »), ou en utilisant la formule de changement de base, on obtient :

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

B.4 Pour tout entier naturel n, $A^n = PB^nP^{-1}$, d'où :

$$\boxed{A^n = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4(-3)^n + (21-15n)2^n & -4(-3)^n + (8+5n)2^{n-1} & (-3)^n + (-2+5n)2^{n-1} \\ 4(-3)^{n+1} + (6-15n)2^{n+1} & -4(-3)^{n+1} + (13+5n)2^n & (-3)^{n+1} + (3+5n)2^n \\ 4(-3)^{n+2} - (9+15n)2^{n+2} & -4(-3)^{n+2} + (18+5n)2^{n+1} & (-3)^{n+2} + (8+5n)2^{n+1} \end{pmatrix}.}$$

Remarque : on passe de la première ligne à la deuxième (resp. à la troisième) en changeant n en $n+1$ (resp. en $n+2$). Cette coïncidence sera élucidée en C.2.

Partie C – Application à une suite récurrente

C.1 En choisissant $\boxed{C = A}$, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

C.2 Une récurrence immédiate montre que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

ce qui donne, compte tenu de B.4 (en fait, seul le calcul de la première ligne de A^n est intéressant ici) :

$$\boxed{u_n = \frac{1}{25}\left((4(-3)^n + (21-15n)2^n)u_0 + (-4(-3)^n + (8+5n)2^{n-1})u_1 + ((-3)^n + (-2+5n)2^{n-1})u_2\right).}$$