

Devoir non surveillé

Calcul effectif d'une relation de Bézout

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Démontrer qu'il existe $(P, Q) \in (\mathbb{K}_{n-1}[X])^2$ unique tel que

$$(1 - X)^n P + X^n Q = 1 \quad (*)$$

2 Montrer que $Q = P(1 - X)$.

3 Montrer l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$(1 - X)P' - nP = \lambda X^{n-1} \quad (**)$$

4 On écrit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X - 1)^k$.

a Vérifier que $\lambda = -na_0$.

b Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$,

$$a_k = a_0 \left(\frac{n}{n+k} \binom{n-1}{k} \right).$$

c Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k (-1)^k = 1$.

d En déduire P .