Corrigé de devoir non surveillé

Calcul effectif d'une relation de Bézout

1 Première méthode : contrairement à la suivante, elle est constructive. Les polynômes X^n et $(1-X)^n$ sont premiers entre eux, car sans racine complexe commune : il existe un couple (U,V) de polynômes tels que $U(1-X)^n + VX^n = 1$. Remarquons que pour tout polynôme A, $(P,Q) = (U - AX^n, V + A(1-X)^n)$ est un autre couple de Bézout pour $((1-X)^n, X^n)$. On choisit pour A le quotient de la division euclidienne de U par X^n, de sorte que $\deg(P) < n$. L'égalité $QX^n = 1 - (1-X)^n P$ impose $\deg(QX^n) < 2n$, soit $\deg(Q) < n$: l'existence est donc prouvée.

Si (P_1,Q_1) et (P_2,Q_2) conviennent, alors $(1-X)^n(P_1 - P_2) = X^n(Q_2 - Q_1)$. Le polynôme X^n divise le produit $(1-X)^n(P_1-P_2)$ et est premier avec $(1-X)^n$: d'après le théorème de Gauss, X^n divise $P_1 - P_2$. Par ailleurs $P_1 - P_2$ est de degré $n-1$ au plus, ce qui force $P_1 - P_2 = 0$, soit $P_1 = P_2$. Il s'ensuit que $X^n(Q_2 - Q_1) = 0$, puis que $Q_1 = Q_2$.

Remarque : en fait, l'algorithme d'Euclide fournit directement cet unique couple.

Seconde méthode : elle consiste à introduire l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & (\mathbb{K}_{n-1}[X])^2 & \to & \mathbb{K}_{2n-1}[X] \\ & & (P,Q) & \mapsto & (1-X)^n P + X^n Q \end{array}$$

dont on vérifie facilement l'injectivité en considérant son noyau. C'est une application linéaire injective entre espaces vectoriels de même dimension finie, et elle est donc bijective. En particulier, 1 admet un unique antécédent par φ.

2 En composant à droite par le polynôme $1-X$ la relation $(*)$, il vient $(1-(1-X))^n P(1-X) + (1-X)^n Q(1-X)$, soit

$$X^n P(1-X) + (1-X)^n Q(1-X).$$

Grâce à l'unicité du couple (P,Q), on peut affirmer que $\boxed{Q = P(1-X).}$

3 En dérivant la relation $(*)$, on obtient :

$$(1-X)^{n-1}((1-X)P' - nP) = -X^{n-1}(XQ' + nQ).$$

Comme précédemment, le théorème de Gauss permet d'affirmer que X^{n-1} divise $(1-X)P' - nP$. Ce dernier polynôme étant de degré $n-1$ au plus, il existe bien un scalaire λ tel que $(1-X)P' - nP = \lambda X^{n-1}$.

4

a Il suffit d'évaluer $(**)$ en 1.

b D'une part,

$$(1-X)P' - nP = -\sum_{k=0}^{n-1} (n+k) a_k (X-1)^k,$$

d'autre part,

$$\lambda X^{n-1} = -na_0((X-1)+1)^{n-1} = -na_0 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (X-1)^k.$$

Ces polynômes étant égaux, on en déduit, par unicité de la décomposition dans la base des puissances de $(X-1)$, le résultat cherché.

c Il suffit d'évaluer $(*)$ en 0.

d En combinant les formules précédentes, il vient

$$\boxed{P = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}\binom{n-1}{k}(X-1)^k}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{n+k}\binom{n-1}{k}}.}$$