Devoir non surveillé

Utilisation des symboles de somme et de produit, principe de récurrence

Exercice 1 : Encadrement de Gauss de la factorielle

1 Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n! = \prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{ij}.$$

2 Montrer que si $i \geqslant 1$ et $j \geqslant 1$, alors

$$i+j-1 \leqslant ij \leqslant \left(\frac{i+j}{2}\right)^2.$$

3 En déduire l'encadrement :

$$n^{n/2} \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Exercice 2 : Un encadrement de $\binom{2n}{n}$

1 Montrer que :

$$\frac{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

2 En déduire que pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{2}.$$

Exercice 3 : Inégalité de convexité généralisée

Soit f une fonction convexe sur I (intervalle d'intérieur non vide). Alors pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, pour tous points $x_1, \ldots, x_n$ de I, tous réels positifs ou nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, de somme 1, on a :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$