Devoir non surveillé

Sommes de parties

Problème – Sommes de parties d'un groupe additif

Dans tout ce problème, $(G, +)$ est un groupe abélien.

Étant donné deux parties A et B de G, on définit la *somme* de A et de B et on note $A + B$ l'ensemble :

$$A + B = \{a + b, \quad (a, b) \in A \times B\}.$$

Soit A une partie de G. On définit par récurrence la notation nA pour tout entier naturel non nul n par $1A = A$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)A = A + nA$.

I.1 Introduire une itératrice afin de montrer que la suite récurrente $(nA)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

Si $b \in B$, la notation $b + A$ désignera la partie $\{b\} + A$ de G.

I.2 Soit $t \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}$.

a Soit n et p des entiers naturels tels que $n \geqslant p$. Montrer :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

b Montrer que l'ensemble des t-uplets $(a_1, \dots, a_t)$ d'entiers naturels tels que $a_1 + \cdots + a_t = N$ a pour cardinal $\binom{N+t-1}{N}$.

I.3 On suppose dans cette question G fini. Soit A et B des parties non vides de G telles que $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) > \mathrm{Card}(G)$.

a Montrer que $G = A + B$.

b Donner un exemple où $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(G)$ mais $G \neq A + B$.

I.4 Soit A et B des parties finies et non vides de G. Montrer :

$$\max(\mathrm{Card}(A), \mathrm{Card}(B)) \leqslant \mathrm{Card}(A + B) \leqslant \mathrm{Card}(A)\,\mathrm{Card}(B).$$

I.5 Soit A une partie finie non vide de G. Montrer que la suite $(\mathrm{Card}(nA))$ est croissante, et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, que :

$$\mathrm{Card}(nA) \leqslant \binom{\mathrm{Card}(A) + n - 1}{n}.$$

I.6 Soit A et B des parties finies et non vides de $\mathbb{Z}$.

a Montrer que $\mathrm{Card}(A + B) \geqslant \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - 1$.

b On suppose que $\mathrm{Card}(A + B) \geqslant \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - 1$, et que A et B ne sont pas des singletons. Montrer l'existence d'entiers a, b, d tels que

$$A = \{a + kd, k \in [\![0, \mathrm{Card}(A) - 1]\!]\} \quad \text{et} \quad B = \{b + kd, k \in [\![0, \mathrm{Card}(B) - 1]\!]\}.$$

I.7 Soit A, B des parties finies non vides de G.

a Soit H l'ensemble des éléments g de G tels que $A = g + A$. Montrer que H est un sous-groupe fini de G.

b Montrer que $\mathrm{Card}(A + B) = \mathrm{Card}(A)$ si et seulement si il existe $b \in G$ tel que $B \subset b + H$.