Corrigé de devoir non surveillé

Sommes de parties

Problème – Sommes de parties d'un groupe additif

I.1 Il suffit de considérer
$$\Delta \ : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(G) & \to & \mathcal{P}(G) \\ B & \mapsto & A+B \end{array}.$$

I.2

a On peut montrer ceci par une récurrence immédiate (dont l'hérédité provient essentiellement de la formule du triangle de Pascal), ou comme dans l'exercice 18TD9, en considérant, pour un élément de $\mathcal{P}_{p+1}([\![1, n+1]\!])$ la valeur de son maximum.

b Il s'agit d'ordonner N batônnets (représentant chacun l'unité) et $t-1$ signes somme : il y a donc $\binom{N+t-1}{N}$ possibilités.

I.3

a Bien sûr, $A+B \subset G$ (car G est stable par $+$, c'est d'ailleurs ce qui a permis de donner un sens à $A+B$.)

Réciproquement, soit $g \in G$. Les parties $g-A$ et B de G, de cardinaux respectifs A et B, ne sont pas disjointes, car $\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B) > \mathrm{Card}(G)$. Il existe donc $(a,b) \in A \times B$ tel que $g-a=b$, soit $g=a+b$, donc $g \in A+B$.

Ceci valant pour tout élément g de G, on a bien montré $G \subset A+B$, d'où l'égalité.

b On peut prendre $G=\mathbb{U}_2$ et $A=B=\{1\}$ (en passant en notation additive).

I.4 Soit $(a,b) \in A \times B$. $A+B$ contient $a+B$, cette dernière partie étant de cardinal B, donc $A+B$ est de cardinal au moins celui de B. De même, $\mathrm{Card}(A+B) \geqslant \mathrm{Card}(A)$ en considérant $b+A$.

On a bien : $\max(\mathrm{Card}(A), \mathrm{Card}(B)) \leqslant \mathrm{Card}(A+B)$.

L'application
$$\alpha \ : \begin{array}{ccc} A\times B & \to & A+B \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}$$
étant surjective (par définition de $A+B$), on a $\mathrm{Card}(A+B) \leqslant \mathrm{Card}(A\times B) = \mathrm{Card}(A)\,\mathrm{Card}(B)$.

I.5 La suite $(\mathrm{Card}(nA))$ est croissante d'après la question précédente et une récurrence immédiate, et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, que :
$$\mathrm{Card}(nA) \leqslant \binom{\mathrm{Card}(A)+n-1}{n}.$$

I.6

a Soit $a_M = \max A$ et $b_m = \min B$. Les ensembles $a_M + B$ et $b_m + A$ sont des parties de $A+B$, de cardinaux ceux de B et A respectivement, et dont le seul élément commun est $a_M + b_m$. On a donc bien :
$$\mathrm{Card}(A+B) \geqslant \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - 1.$$

b On écrit $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ et $B = \{b_1, \dots, b_q\}$ où p, q sont supérieurs ou égaux à 2, et où les suites $(a_1, \dots, a_p)$ et $(b_1, \dots, b_q)$ sont strictement croissantes.

Considérons le « rectangle » $A \times B$. On va du sommet $I(a_1, b_1)$ au sommet opposé $J(a_p, b_q)$ en s'autorisant deux types de déplacements : d'une case vers la droite, ou d'une case vers le haut. Tous les chemins menant de I à J correspondent à des suites de $(p+q-1)$-uplets de $A \times B$, dont la suite des sommes est strictement croissante : son image est donc $A+B$. Par conséquent, toutes ces suites ont même suite des sommes. Autrement dit, en partant d'une case (a_i, b_j) (où $i < p$ et $j < q$), les deux déplacements admissibles reviennent au même : $a_{i+1} + b_j = a_i + b_{j+1}$. Par conséquent, pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, où $i < p$ et $j < q$, $a_{i+1} - a_i = b_{j+1} - b_j$. En notant d cette valeur commune, on obtient bien le résultat voulu.

I.7

a H est évidemment une partie de G, non vide car comprenant 0_G. De plus, pour tous $g, g' \in H$,
$$g + g' + A = g + (g' + A) = g + A = A,$$

et $-g+A=A$ en translatant de $-g$ la relation $A=g+A$.

H est bien un sous-groupe de G. Il est fini puisque $H+A=A$, et donc $\mathrm{Card}(H) \leqslant \mathrm{Card}(A)$.

b Le sens indirect est clair : supposons disposer de $b \in G$ tel que $B \subset b+H$. On a alors :

$$A+B \subset A+(b+H) = b+(A+H) = b+A,$$

donc $\mathrm{Card}(A+B) \leqslant \mathrm{Card}(A)$, puis $\mathrm{Card}(A+B) = \mathrm{Card}(A)$ d'après I.4.

Réciproquement, supposons $\mathrm{Card}(A+B) = \mathrm{Card}(A)$. Soit $b \in B$. La partie $b+A$ de $A+B$ a même cardinal ($\mathrm{Card}(A)$) que cet ensemble fini : $b+A = A+B$. Soit $b' \in B$: on a de même $b'+A = A+B = b+A$, et donc, en translatant de $-b$: $b'-b+A = A$, *i.e.* $b'-b \in H$. On a donc $B \subset b+H$.

L'équivalence est bien montrée.