Devoir non surveillé

Problème – Sous-algèbres irréductibles de $\mathcal{L}(E)$

Dans ce problème, on se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et on travaille avec un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n.

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de E est *stable* par un endomorphisme f de E si $f(F) \subset F$. Par exemple, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, les espaces vectoriels triviaux de E, c'est-à-dire $\{0_E\}$ et E, sont stables par f.

On rappelle qu'une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$ est une partie de $\mathcal{L}(E)$ qui en est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau.

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On dit que $\mathcal{A}$ est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont les sous-espaces vectoriels triviaux $\{0_E\}$ et E.

Partie A –

A.1 Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par g.

A.2 On se donne ici une partie irréductible $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$. Soit f un endomorphisme de E commutant avec chaque élément de $\mathcal{A}$.

a Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.

b On admet l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f - \lambda \mathrm{Id}_E \notin \mathrm{GL}(E)$. Montrer que $f = \lambda \mathrm{Id}_E$.

On suppose désormais que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$.

A.3

a Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Montrer que $\{f(x),\ f \in \mathcal{A}\} = E$.

b Soit φ une forme linéaire non nulle sur E, et posons

$$\mathcal{A}' = \{\varphi \circ f, f \in \mathcal{A}\}.$$

Montrer que $\bigcap_{\psi \in \mathcal{A}'} \ker(\psi) = \{0_E\}$, puis en déduire que $\mathcal{A}' = E^*$, où E^* désigne le dual $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ de E.

Indication : on pourra considérer l'application

$$\begin{array}{cccc} \Delta : & E & \rightarrow & E^{\star\star} \\ & x & \mapsto & (f \mapsto f(x)) \end{array}$$

A.4 On suppose dans cette question que $\mathcal{A}$ contient un élément $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. On note y un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u)$.

a Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur E telle que

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \varphi(x)\, y.$$

b Soit v un endomorphisme de E de rang 1, z un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(v)$, et $\psi \in E^*$ tels que

$$\forall x \in E, \quad v(x) = \psi(x)\, z.$$

Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(y) = z$ et qu'il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que $\varphi \circ g = \psi$.

En déduire que $v \in \mathcal{A}$.

c Conclure que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

A.5 Dans cette question, on suppose disposer d'un élément u de $\mathcal{A}$ tel que $\mathrm{rg}(u) \geqslant 2$.

a Montrer l'existence de $x, y \in E$ tels que $(u(x), u(y))$ soit libre, puis qu'il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f \circ u(x) = y$.

b Vérifier que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par $u \circ f$.

On admet qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que l'endomorphisme g induit par $u \circ f - \lambda \mathrm{Id}_E$ sur $\mathrm{Im}(u)$ ne soit pas injectif. Montrer que $g \neq 0$, puis que $\mathrm{Im}(g))$ est un sous-espace vectoriel strict de $\mathrm{Im}(u)$. En déduire l'existence de $v \in \mathcal{A}$ non nul tel que $\mathrm{rg}(v) < \mathrm{rg}(u)$.

A.6 Déduire de ce qui précède que $\mathcal{L}(E)$ est la seule sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$.