Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Sous-algèbres irréductibles de $\mathcal{L}(E)$

Partie A –

A.1 Vu en TD.

A.2

a Soit $a \in \mathcal{A}$. On a $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)a = fa - \lambda a = af - \lambda a = a(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

b $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E, stable par tout élément de $\mathcal{A}$, et non réduit au vecteur nul (car $f - \lambda \mathrm{Id}_E \notin \mathrm{GL}(E)$) : c'est donc E tout entier, *i.e.* $f = \lambda \mathrm{Id}_E$.

A.3

a L'ensemble étudié est clairement stable par $\mathcal{A}$ (car $\mathcal{A}$ est stable par produit), et non nul car comprenant x (pour $f = \mathrm{Id}_E$) : c'est donc bien E tout entier.

b Soit $x \in \bigcap_{\psi \in \mathcal{A}'} \ker(\psi)$, non nul. Pour tout $f \in \mathcal{A}$, $\varphi(f(x)) = 0$, donc $\varphi = 0$ d'après la question précédente, ce qui est absurde. Ainsi, $\bigcap_{\psi \in \mathcal{A}'} \ker(\psi) = \{0_E\}$.

L'application

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & E & \to & E^{\star\star} \\ & x & \mapsto & (\psi \mapsto \psi(x)) \end{array},$$

(bien définie car l'évaluation en $x \in E$, de E^* dans $\mathbb{C}$, est linéaire), est linéaire, car les formes linéaires le sont. Elle est de plus injective, car tout vecteur non nul admet une forme linéaire qui l'évalue en un scalaire non nul. Comme E et $E^{\star\star}$ ont même dimension finie, c'est un isomorphisme.

Si $\mathcal{A}'$ était strictement inclus dans E^*, alors $\mathcal{A}'$ serait incluse dans un hyperplan de E^*, et serait donc incluse dans le noyau d'une forme linéaire non nulle, *i.e.*, d'après l'étude de Δ, il existerait un vecteur x non nul de E, évalué en 0 par tout élément de $\mathcal{A}'$, ce qui contredit le résultat précédent : $\mathcal{A}' = E^*$.

A.4

a Pour tout vecteur non nul x de E, il existe un unique scalaire λ tel que $u(x) = \lambda y$: on pose $\varphi(x) = \lambda$. On pose aussi $\varphi(0_E) = 0$, et on vérifie aisément que l'application φ ainsi définie répond à la question.

b Soit v un endomorphisme de E de rang 1, z un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(v)$, et $\psi \in E^*$ tels que

$$\forall x \in E, \quad v(x) = \psi(x)\, z.$$

D'après A.3, il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(y) = z$ et qu'il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que $\varphi \circ g = \psi$.

On vérife aisément que $v = f \circ u \circ g$, et donc que $v \in \mathcal{A}$.

c D'après la question précédente, $\mathcal{A}$ contient tout élément de $\mathcal{L}(E)$ de rang 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, de n-uplet de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k h(e_k),$$

et s'écrit donc comme somme d'applications de rang 1 (les $x \mapsto x_k h(e_k)$ si $h(e_k)$ n'est pas nul) : $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

A.5 Dans cette question, on suppose disposer d'un élément u de $\mathcal{A}$ tel que $\mathrm{rg}(u) \geqslant 2$.

a $\mathrm{rg}(u) \geqslant 2$, donc $\mathrm{Im}(u)$ contient un plan vectoriel : il existe $x, y \in E$ tels que $(u(x), u(y))$ soit libre.

En particulier, $u(x) \neq 0$, donc A.3.a permet d'affirmer l'existence de $f \in \mathcal{A}$ tel que $f \circ u(x) = y$.

b $\mathrm{Im}(u \circ f) \subset \mathrm{Im}(u)$, donc $(u \circ f)(\mathrm{Im}\, u) \subset \mathrm{Im}\, u$.

$u \circ f - \lambda \mathrm{Id}_E$ envoie $u(x)$ sur $u(y) - \lambda u(x)$, qui est non nul : $g \neq 0$.

Comme g, endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{Im}(u)$, n'est pas injectif, il n'est pas non plus surjectif : $\mathrm{Im}(g)$ est un sous-espace vectoriel strict de $\mathrm{Im}(u)$.

En posant $v = g \circ u$, on a $v \in \mathcal{A}$ et $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(g)$, donc $\mathrm{rg}(v) < \mathrm{rg}(u)$.

A.6 Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Soit r le rang minimal d'un élément non nul de $\mathcal{A}$: la question précédente montre que, nécessairement, $r = 1$. Par conséquent, $\mathcal{A}$ possède un élément de rang 1, puis $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ d'après A.4.c.

$\mathcal{L}(E)$, qui est bien sûr une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$, en est donc la seule.