Devoir non surveillé

Exercice 1 : D'après E3A PSI 2007

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_0, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on considère le polynôme P_k défini par :

$$P_k = \prod_{\substack{j = 0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}.$$

1 Pour k et i éléments de $[\![0, n]\!]$, calculer $P_k(x_i)$.

2

a Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est un système libre de $\mathbb{R}_n[X]$.

b Que peut-on en déduire ?

3

a Soit Q un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Démontrer que $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

b Pour m élément de $[\![1, n]\!]$, on pose :

$$s_m = \sum_{k=0}^{n} x_k^m P_k(0).$$

Montrer que $s_m = 0$.

4 Dans cette question, Q est un élément de $\mathbb{R}[X]$. On pose $Q_1 = Q - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

a Démontrer que Q_1 admet au moins $n + 1$ racines réelles distinctes.

On pose $s_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1} P_k(0)$ et $s_{n+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+2} P_k(0)$.

b Montrer que $s_{n+1} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n} x_k$.

c ♡ Calculer s_{n+2} (exprimer le résultat en fonction de n, de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$ et de $\prod_{k=0}^{n} x_k$).

5 Dans cette question, Q est un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré égal à n.
On suppose de plus que $x_0, \ldots, x_n$ sont des entiers relatifs vérifiant $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.
Pour k élément de $[\![0, n]\!]$, on note :

$$y_k = \prod_{\substack{j = 0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j).$$

a Prouver que : $|y_k| \geqslant k!(n - k)!$.

b Déduire de 3.a que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{Q(x_k)}{y_k} = 1$.

Indication : Q est unitaire.

c On définit M par : $M = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} |Q(x_k)|$.

Montrer que $M \geqslant \frac{n!}{2^n}$.