Corrigé de devoir non surveillé

Exercice 1 : D'après E3A PSI 2007

1 On a clairement $\boxed{P_k(x_i) = \delta_{k,i}.}$

2

a Observons déjà que $P_0, \dots, P_n$ sont bien des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = 0$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ préalablement fixé, une évaluation en x_i donne $\alpha_i = 0$: $\boxed{\text{la famille } (P_0, \dots, P_n) \text{ est un système libre de } \mathbb{R}_n[X].}$

b $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre de $n+1 (= \dim(\mathbb{R}_n[X]))$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$: $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

3

a $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ et $P \mapsto \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$ sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$, coïncidant sur la base $(P_0, \dots, P_n)$ de cet espace vectoriel : ils sont donc égaux.

En particulier, $\boxed{Q = \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k.}$

b En appliquant le résultat précédent dans le cas où $Q = X^m$, on obtient $\boxed{s_m = 0,}$ pour tout $m \in [\![1, n]\!]$.

4

a Clairement, $x_0, \dots, x_n$ sont des racines réelles distinctes de Q_1 : Q_1 admet au moins $n+1$ racines réelles distinctes.

b Prenons $Q = X^{n+1}$: le polynôme $X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1} P_k$ est unitaire de degré $n+1$, et possède $x_0, \dots, x_{n+1}$ pour racines : c'est donc le polynôme $\prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$. Sa valeur en 0 est $-s_{n+1}$, d'où

$$\boxed{s_{n+1} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n} x_k.}$$

c On prend cette fois-ci $Q = X^{n+2}$: le polynôme $H = X^{n+2} - \sum_{k=0}^{n} x_k^{n+2} P_k$ est unitaire, possède $x_0, \dots, x_n$ pour racines. Comme ce polynôme ne comprend pas de terme en X^{n+1}, la somme de ses racines est nulle : la racine de H non encore trouvée est $-\sum_{k=0}^{n} x_k$. On a donc

$$H = \left(X + \sum_{k=0}^{n} x_k \right) \prod_{k=0}^{n} (X - x_k),$$

d'où, en évaluant en 0 :

$$\boxed{s_{n+2} = (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \left(\prod_{k=0}^{n} x_k \right).}$$

5

a $|y_k| = \left(\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j) \right) \left(\prod_{j=k+1}^{n} (x_j - x_k) \right).$

$\prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)$ est le produit de k entiers naturels tous non nuls, et distincts deux à deux : il est donc supérieur ou égal à $k!$ (par convention, un produit indexé par l'ensemble vide vaut 1).

De même, $\prod_{j=k+1}^{n}(x_j - x_k) \geqslant (n-k)!$.

Ainsi, $\boxed{|y_k| \geqslant k!(n-k)!.}$

b Sachant que Q est unitaire, on déduit de 3.a que : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{Q(x_k)}{y_k} = 1.}$

c D'après la formule du binôme de Newton dans le corps des réels (ou par un habile dénombrement des parties de $[\![1, n]\!]$),

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1)}{k!(n-k)!}\right) n!,$$

d'où, d'après ce qui précède :

$$1 = \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{Q(x_k)}{y_k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{Q(x_k)}{y_k}\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{|y_k|}\right) M \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}\right) M = \frac{2^n}{n!} M$$

Ainsi, $\boxed{M \geqslant \dfrac{n!}{2^n}.}$