Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Sur les fonctions continues périodiques, ou presque

Partie A – Préliminaires sur la partie fractionnaire d'un réel

A.1 On a $x+y = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + F(x) + F(y)$.
Si $F(x)+F(y) < 1$, on a alors $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ et $F(x+y) = F(x)+F(y)$.
Si $F(x)+F(y) \geqslant 1$, on a, sachant que $F(x)+F(y) < 2$:

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \leqslant x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2,$$

donc $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$, puis

$$F(x+y) = x+y-(\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1) = F(x)+F(y)-1.$$

A.2 Supposons qu'il existe $k \in [\![0, m-1]\!]$ tel que $F(x+(k+1)x_0) = F(x+kx_0)+F(x_0)-1$.
On a alors, puisque $F(x+kx_0)-1 \leqslant 0$ (et même <0) : $F(x+(k+1)x_0) \leqslant F(x_0)$.
Supposons maintenant qu'il n'existe pas de tel entier k, et donc que pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, $F(x+(k+1)x_0) = F(x+kx_0)+F(x_0)$.
On observe que

$$F(x+mx_0)-F(x) = \sum_{k=0}^{m-1}(F(x+(k+1)x_0)-F(x+kx_0)) = mF(x_0) \geqslant 1,$$

ce qui est absurde puisque F est à valeurs dans $[0,1[$.

A.3 On peut écarter le cas évident où $\delta \geqslant 1$. Observons également que, α étant irrationnel, $F(u\alpha) > 0$ pour tout entier non nul u.
Le réel α étant irrationnel, $\alpha\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$: il existe donc des entiers relatifs tels que $0 < |u\alpha - v| \leqslant \delta$. Si $u\alpha - v \geqslant 0$, alors $0 < F(u\alpha) = F(u\alpha - v) \leqslant \delta$ (car $\delta < 1$), et, sinon, alors $0 < F(-u\alpha) \leqslant \delta$: quitte à changer u en son opposé, il existe bien un entier relatif u tel que $0 < F(u\alpha) \leqslant \delta$.

Partie B – Généralités sur les fonctions périodiques

B.1 Vue en TD.

B.2

a Ω_f est une partie de $\mathbb{R}$, comprenant 0, et stable par différence (vérifications immédiates) : c'est donc un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

b Ω_f n'est pas réduit à 0 (puisque f est périodique), et n'est pas dense non plus dans $\mathbb{R}$ (dans le cas contraire, elle serait constante de valeur $f(0)$ sur une partie dense de $\mathbb{R}$, puis, étant en outre continue, elle serait constante sur $\mathbb{R}$) : Ω_f est donc de la forme $a\mathbb{Z}$, où a est un réel strictement positif, et $\Omega_f \cap \mathbb{R}_+^*$ admet alors a pour plus petit élément.

c La fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ admet tout rationnel pour période, n'est pas constante, et n'admet pas de plus petite période strictement positive.

B.3 On peut vérifier à la main que $\mathcal{C}_T$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. On peut aussi remarquer que c'est le noyau de l'endomorphisme[1] $f \mapsto f \circ t_T - f$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, où t_T est la translation de T (*i.e.* $t \mapsto t+T$).
En vérifiant en outre que l'application constante de valeur 1, et que le produit de deux fonctions T-périodiques le sont également, on en déduit que $\mathcal{C}_T$ est aussi un sous-anneau de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

1. cette application est linéaire car la composition à droite par une fonction donnée est linéaire

B.4 Soit $f \in \mathcal{C}_{per}$, et soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ une période de f : f étant T-périodique, $f(\mathbb{R}) = f([0,T])$. En outre, f est continue –donc bornée– sur le segment $[0,T]$: f est bornée.

Ainsi : $\mathcal{C}_{per} \subset \mathcal{B}$.

B.5

a Soit $T \in \mathbb{R}$ une période de $f = g + h$, soit s la fonction réelle d'une variable réelle donnée, pour tout réel x par

$$s(x) = g(x+T) - g(x)(= h(x) - h(x+T)).$$

Cette fonction est clairement continue, et admet T_g et T_h pour périodes. Par structure de groupe additif, Ω_s contient donc $T_g\mathbb{Z} + T_h\mathbb{Z}$. Or ce dernier sous-groupe n'est pas de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ pour un certain réel α, car T_g et T_h sont incommensurables : il est donc dense dans $\mathbb{R}$. Ω_s le contenant, il est également dense dans $\mathbb{R}$.

La fonction s est donc constante (cf. B.2.b) : soit l sa valeur. Par une récurrence immédiate, on a $g(nT) = nl + g(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La fonction g étant bornée (d'après la question précédente), ceci impose $l = 0$: T est donc une période commune à g et h, *i.e.* $T = 0$ (car T_g et T_h, incommensurables, sont **les** périodes respectives de g et de h).

La fonction f n'est donc pas périodique.

b Les fonctions $g = \cos$ et $h : x \mapsto \cos(\sqrt{2}x)$ sont des élements de $\mathcal{C}_{per}$ dont les périodes sont 2π et $\sqrt{2}\pi$ respectivement. Par irrationnalité de $\sqrt{2}$, ces périodes sont incommensurables : d'après la question précédente, $g + h \notin \mathcal{C}_{per}$.

$\mathcal{C}_{per}$, non stable par somme, n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Remarque : on aurait pu (plus élémentairement) prouver la non periodicité de $g + h$ en observant qu'elle ne prend la valeur 2 qu'en 0.

Partie C – Fonctions quasi-périodiques

C.1 Soit $f \in \mathcal{C}_{per}$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ une période de f. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On constate aisément que $E_{f,\varepsilon}$ contient $T\mathbb{Z}$, et rencontre donc tout segment de longueur T : f est quasi-périodique.

C.2 Soit $f \in \mathfrak{Q}$. On fixe $\varepsilon = 1$, et on choisit $l \in \mathbb{R}_+^*$ tel que tout segment de longueur l rencontre $E_{f,1}$. Soit x un réel, $T \in E_{f,1} \cap [x, x+l]$. On a : $|f(x) - f(x-T)| \leqslant 1$, donc, par inégalité triangulaire :

$$|f(x)| \leqslant |f(x-T)| + 1.$$

Or $|x - T| \leqslant l$, et $|f|$ est continue donc majorée sur le segment $[-l, l]$, mettons par M, ce qui fournit :

$$|f(x)| \leqslant M + 1.$$

La fonction $|f|$ est donc majorée : f est bornée.

Dès lors : $\mathfrak{Q} \subset \mathcal{B}$.

Partie D – La somme de deux fonctions continues périodiques est quasi-périodique

D.1 Si g et h admettent des périodes strictement positives T_g et T_h telles que T_g/T_h soit un rationnel p/q (où $p, q \in \mathbb{N}^*$), alors $qT_g(= pT_h > 0)$ est une période de g et de h, donc de $g + h$. D'après C.1, $g + h$ est quasi-périodique.

D.2 Soit x un réel :

$$\begin{aligned} |(g+h)(x+T) - (g+h)(x)| &= |h(x+T) - h(x)| \quad (g \in \mathcal{C}_T) \\ &= |h(x+T-vT_h) - h(x)| \quad (h \in \mathcal{C}_{T_h}) \\ &\leqslant \varepsilon \quad (T - vT_h \in E_{h,\varepsilon}), \end{aligned}$$

donc T est bien une ε-quasi période de $g + h$.

D.3

a T est une période de g et en posant $v = \lfloor uT_g/T_h \rfloor$, on remarque que $T - vT_h$ est une ε-quasi période de h, car, pour tout réel x :

$$|(x+T-vT_h) - x| = |T - vT_h| = F(T/T_h)T_h \leqslant \eta,$$

donc

$$|h(x+T-vT_h) - h(x)| \leqslant \varepsilon.$$

D'après D.2, T est une ε-quasi période de $g+h$.

b Soit m un entier tel que $mF(T/T_h) \geqslant 1$. D'après A.2, parmi $m+1$ multiples entiers consécutifs de T, l'un au moins, mettons kT, vérifie $0 < F(kT/T_h) \leqslant F(T/T_h) \leqslant \eta/T_h$. Comme à la question précédente, on en déduit que kT est une ε-quasi période de $g+h$. Ainsi, $E_{g+h,\varepsilon} \cap T\mathbb{Z}$ rencontre tout segment de longueur $l = (m+1)T(>0)$: cet ensemble est bien réparti.

c Puisque $E_{g+h,\varepsilon} \cap T\mathbb{Z}$ est bien réparti, $E_{g+h,\varepsilon}$ l'est *a fortiori*.

Ceci valant pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ préalablement fixé, $g+h$ est bien quasi-périodique.