Devoir non surveillé

Formules pour tangente et tangente hyperbolique

Problème – Formules pour tangente et tangente hyperbolique

Partie A – Formules pour tangente

A.1

a Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\arctan(\alpha)$ est un argument de $1 + i\alpha$. En déduire un argument de $\lambda(1 + i\alpha)$.

b Soit z un nombre complexe non imaginaire pur. Montrer qu'un argument de z est $\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$ si $\mathrm{Re}(z) > 0$, $\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) + \pi$ si $\mathrm{Re}(z) < 0$.

A.2

a Soit θ un réel non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π (*i.e.* $\theta - \frac{\pi}{2}$ n'est pas multiple entier de π), et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un argument de $(1 + i\tan(\theta))^n$.

On suppose désormais que $(1 + i\tan(\theta))^n$ n'est pas imaginaire pur. On pose $P_n = (1 + iX)^n$. Montrer que

$$\tan(n\theta) = \frac{\mathrm{Im}(P_n(\tan(\theta)))}{\mathrm{Re}(P_n(\tan(\theta)))},$$

pour tout réel θ tel que $\tan(\theta)$ et $\tan(n\theta)$ soient bien définis.

Indication : on pourra utiliser A.1.b, puis égaler deux tangentes.

Pour tout réel x tel que $\mathrm{Re}(P_n(x)) \neq 0$, on pose $F_n(x) = \frac{\mathrm{Im}(P_n(x))}{\mathrm{Re}(P_n(x))}$. Ceci définit une application F_n telle que, pour tout θ pour lequel $\tan(\theta)$ et $\tan(n\theta)$ soient définis : $\tan(n\theta) = F_n(\tan(\theta))$.

b Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\tan(\varphi)$ et $F_n(\tan(\varphi))$ sont bien définis, alors $F_n(\tan(\varphi)) = \tan(n\varphi)$.

c Déterminer de deux façons le domaine de définition de F_5, en déduire $\tan(\frac{\pi}{10})$. Calculer $F_5(x)$ pour tout point x de ce domaine.

Partie B – Formule pour tangente hyperbolique

B.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left(\frac{1 + \mathrm{th}(nx)}{1 - \mathrm{th}(nx)}\right) = \left(\frac{1 + \mathrm{th}(x)}{1 - \mathrm{th}(x)}\right)^n.$$

Indication : on pourra utiliser l'expression logarithmique de la fonction argth.

B.2 Étant donné un polynôme P, on appelle *partie paire* de P et on note $\mathcal{P}(P)$ le polynôme $\frac{P(X) + P(-X)}{2}$, on appelle *partie impaire* de P et on note $\mathcal{I}(P)$ le polynôme $\frac{P(X) - P(-X)}{2}$.

Déterminer un polynôme Q_n de degré n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{th}(nx) = \frac{\mathcal{I}(Q_n)(\mathrm{th}(x))}{\mathcal{P}(Q_n)(\mathrm{th}(x))}$$